Dérivation des fonctions vectorielles

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie, et $f:\mathbb{R}\longrightarrow E$ dérivable en 0. On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)=2f(x)$. Montrer que l'application f est linéaire.

Exercice 2 Soit $f:\mathbb{R}\to E$ une application continue à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$.
Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

1. f est dérivable en 0 ;
2. $x\longmapsto \dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ admet une limite en 0 dans E.

Exercice 3 Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes réelles $\alpha>1$ et $K\geq 0$ telle que $\forall x,y\in I,\ \ |f(x)-f(y)|\leq K|x-y|^{\alpha}$. Montrer que f est constante.

Exercice 4 Soit $f:]-1,1=[\to\mathbb{R}^2$ définie par : $f(t)=\begin{cases}\left(t^2\sin\dfrac{1}{t},t^2\cos\dfrac{1}{t}\right) & \text{si }\ -1<t<0\\ (0,0) & \text{si }\ 0\leq t<1.\end{cases}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et que $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 5 Soit $f:\mathbb{R}\to E$ une fonction dérivable en $a\in\mathbb{R}$. Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}.$$

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{t^2}} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si }\ t\leq 0.\end{cases}$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(t)=P_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{\frac{-1}{t^2}}$, où P_n est un polynôme, dont on précisera le degré et le coefficient maximal.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité à l'ordre n en 0 (à droite).

Exercice 7 Soit n un entier naturel non nul et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ \varphi(t)=\det(i+tf)$$

où i est l'identité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 8 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme définie par : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|A\|=\sup\limits_{X\neq 0}\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.
Soient B et H deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit k un entier, $k\geq 1$, soit g_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$g_k(x)=(B+xH)^k.$$

Les deux matrices B et H ne sont pas supposées commutables.

1. Établir que la fonction g_k est continûment dérivable ; calculer sa dérivée.
2. En déduire l'inégalité :
$$\|(B+H)^k-B^k\|\leq k\|H\|(\|B\|+\|H\|)^{k-1}.$$

Exercice 9 Soit $\vec{f}:I\to\mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant pour tout $t\in I$, $\vec{f}''(t)\in\text{Vect}\vec{f}(t)$.

1. Montrer que l'application $t\mapsto\vec{\sigma}(t)=\vec{f}(t)\wedge\vec{f}'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $t_0\in I$ tel que les vecteurs $\vec{f}(t_0)$ et $\vec{f}'(t_0)$ ne soit pas colinéaires.
   Montrer qu'il existe alors un plan de $\mathbb{R}^3$ contenant les valeurs prises par $\vec{f}(t)$.
3. On suppose qu'il existe $t_0\in I$ tel que les vecteurs $\vec{f}(t_0)$ et $\vec{f}'(t_0)$ sont colinéaires. On suppose de plus que $\vec{f}(t)$ ne s'annule pas.
   Montrer qu'il existe alors une droite de $\mathbb{R}^3$ contenant les valeurs prises par $\vec{f}(t)$.

• • • • • • • • • •