Calcul différentiel

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On définit $g : (x, y) \longmapsto (f(y, x)$, $g_1 : (x, y) \longmapsto f(x, y + x)$ et $h : x \longmapsto f(x, -x)$.
Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x, y)$ et $h'(x)$.

Exercice 2 Calculer la différentielle de l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0, 0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
5. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x, y) = (f(x, y), f(y, x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1, 1)$. La fonction F admet-elle une réciproque locale au voisinage du point $(2, 2)$?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 5 On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (\sin(xy), y \cos x, xy \sin(xy) \exp(y^2))$$

et

$$g(u, v, w) = uvw$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en $(1.)$, calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $Jf(x, y)$ et $Jg(u, v, w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous $(2.)$ en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. En quels points l'application $x \longmapsto \|x\|_2$ est-elle différentielle ?
2. Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice 7
1. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \mathrm{Tr}(M^3)$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer la différentielle de f en tout point M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ de l'application $f : M \to M^{-1}$.

Exercice 8 Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall\lambda \in]0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$.

1. Montrer pour une telle fonction l'identité d'Euler :
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x) \quad (1)$$
2. Montrer que (1) caractérise les fonctions homogènes de degré r.
3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice d'ordre n, et soit $\det(A) = f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ développement par rapport à la première ligne.
Montrer que $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \frac{\partial f}{\partial a_{1i}}(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$.

Exercice 9 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est l'application linéaire nulle.
2. Montrer que f ainsi que ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 existent en chaque point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
4. Que peut-on dire de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Conclure.

Exercice 10 Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \to (u+v, uv)$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u < v\}$ vers un ouvert V que l'on précisera.

Exercice 11 Déterminer les extremums locaux et globaux des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. $f_2(x,y) = \arctan xy$
3. $f_3(x,y) = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$
4. $f_5(x,y) = \sin x \sin y$

Exercice 12 Étudier les extremums locaux et globaux des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

1. $f_1(x,y,z) = x^2y + y^2z + 2x - z$
2. $f_2(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$.

Exercice 13 Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, en réalisant le changement de variables $(x,y) \to (u = 2x+y, v = 3x+y)$.

Exercice 14 En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles $\quad y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f$

Exercice 15 Soit E un espace de Banach. Notons I l'application identique de E et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

1. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|v\| < 1$. Montrer que $I + v$ est inversible et
$$\|(I+v)^{-1} - I\| \leq \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{J}$ des automorphismes de E est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ et que l'application $\varphi : v \longmapsto v^{-1}$ est continue sur $\mathfrak{J}$
3. Montrer que φ est différentiable sur $\mathfrak{J}$ et que si $u \in \mathfrak{J}$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ on a

$$d\varphi_u(v) = -u^{-1} \circ v \circ u^{-1}.$$

Exercice 16 Soit $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On considère le changement de variable h qui est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(u, v) \longmapsto h(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right),$$

et l'on pose $g = G \circ h$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre un de g en fonction de celles de G et vice-versa.
2. Déterminer à l'aide du calcul précédent toutes les fonctions G qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) + 4xG(x, y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) + 4yG(x, y).$$

3. (a) Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant toujours le changement de variable h, déterminer sous forme d'intégrales les fonctions G qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) + 4(x - y)G(x, y) = \phi(x, y).$$

   (b) Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation telle que $G(x, 0) = 0$ pour tout réel x et écrire cette solution sous forme d'une intégrale.

Exercice 17 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\sin y, y + \frac{1}{2}\sin x\right).$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.
2. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Longrightarrow \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|,$$

   où $\|.\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = \left(a + \frac{1}{2}\sin y, b - \frac{1}{2}\sin x\right).$$

   (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.$$

   (b) En déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.
5. Calculer $d(f^{-1})_{(0,0)}$.

•••••••••••