Fonctions implicites
Applications

Exercice 1 Montrer que l'égalité $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\varphi : x \longmapsto y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$; donner un développement limité de φ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 2 Soit $k \in [0, 1[$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq k$. On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (y + f(x), x + f(y))$.
Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Montrer que l'égalité $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z + 1 = 0$ définit, au voisinage de $(0, 0)$, une fonction implicite $\varphi : (x, y) \to \varphi(x, y) = z$ telle que $\varphi((0, 0)) = 1$.
Donner la formule de Taylor de φ, à l'ordre 2, au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 4 Soit $f : (x, y) \longmapsto x + 2y$ définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 5\}$

1. Justifier que f est continue et présente des extremums sur D.
2. Déterminer ses valeurs.

Exercice 5 Déterminer $\displaystyle\sup_{(x,y)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2} \sin x \sin y \sin(x + y)$.

Exercice 6 Soit $\mathscr{D}$ la domaine des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \geq 0, y \geq 0$ et $x + y \leq 1$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $a > 0$, $b > 0$ et $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par : $r(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)$. Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}$.
3. Déterminer $\displaystyle\sup_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x, y)$.

Exercice 7 Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 Déterminer parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume fixé (res. surface fixée) celui qui a la plus petite surface (res. le plus grand volume).

Exercice 9 Soit n un entier strictement positif, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons qu'il existe un nombre réel k strictement positif tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on ait :

$$(df_x(h)|h) \geq k(h|h),$$

où $(.|.)$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$, $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi(t) = (f(x + t(y - x))|y - x).$$
Montrer que φ est dérivable en tout point de $]0, 1[$, et exprimer la dérivée φ' de φ à l'aide de df.
4. Montrer que pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$(f(y - x)|y - x) \geq k(y - x|y - x).$$
En déduire que, pour tous x et y de $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité :
$$\|f(y) - f(x)\| \geq k\|y - x\|$$
où $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $(.|.)$.
5. Montrer que, pour tout fermé F de $\mathbb{R}^n$, $f(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
6. On admet que $\mathbb{R}^n$ est connexe. Montrer que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même .

• • • • • • • • • • •