COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1 Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x-a|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace vectoriel réel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2 Écrire l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, tel que $P(0) = -1,\ \ P(2) = 1,\ \ P(-2) = 1,\ \ P(-1) = 2$.

Exercice 3 Soient A et B deux matrices carrées de format n telles que $AB - BA = A$. Calculer la trace de A^{2011}.

Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Si $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \mathtt{C}_1^1 & \mathtt{C}_2^1 & \cdots & \mathtt{C}_n^1 \\ 0 & 0 & \mathtt{C}_2^2 & \cdots & \mathtt{C}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mathtt{C}_n^n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On associant à M un endomorphisme, montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 6 Soient $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. $M(a)$ et $N(a)$ sont-elles semblables ?

Exercice 7 Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ (a réel donné). Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^n$. .

Exercice 9
1. Soit $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.
2. Déterminer les éléments $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ tels que pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(XY) = f(YX)$.

Exercice 10 Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a\mathrm{Tr}$.

Exercice 11 On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égale à n. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)dt}{1+t^2} \end{array}.$$

1. Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ nombres réels distincts deux à deux. Démontrer qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$. Donner une méthode pratique de calcul des λ_i.
2. On suppose $n = 2k+1$ impair. Démontrer qu'il existe n réels $x_1, x_2, ..., x_n$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ \varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une forme $n-$linéaire alternée sur E. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on définit :

$$\begin{array}{cccc} f_u : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_1, ..., x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, ..., x_n) \end{array}.$$

Montrer que $f_u = \mathrm{Tr}(u) f$.

Exercice 13 Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice réelle telle que : $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ pour tout $i : 1 \leq i \leq n$. Montrer que M est de rang n.

Exercice 14 Considérons les formes linéaires $(f_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sur $\mathbb{R}^4$ définies au moyen de leurs coordonnées dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, par :

$$f_1 = (1, 0, -\lambda, 0), \quad f_2 = \left(0, 1, 0, -\frac{1}{\lambda}\right), \quad f_3 = (1, 0, 0, -\mu), \quad f_4 = \left(0, 1, 0, -\frac{1}{\mu}\right)$$

où λ et μ sont des nombres réels non nuls. Étudier l'indépendance linéaire de ces formes et trouver lorsqu'elles sont indépendantes la base de $\mathbb{R}^4$ duale de la base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Exercice 15 On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier positif p tel que $A^p = 0$. Soit A une telle matrice ; on définit la matrice e^A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par : $e^A = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k$.

1. Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent, on a : $e^{A+B} = e^A e^B$.
2. Calculer e^A, e^B, e^C pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 Soit p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 17 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel qu'il existe de un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$\mathscr{C}_f = \{g \in \mathscr{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathscr{C}_f = \mathbb{K}_n[f] = \{P(f) / P \in \mathbb{K}_n[X]\}$.
3. Déterminer la dimension de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 18
1. Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer $\dim \ker(A - I_n) = \dfrac{1}{q} \sum\limits_{k=0}^{q-1} \mathrm{Tr}(A^k)$.

Exercice 19 Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe des matrices $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = U^t V$.
2. En déduire $H^2 = \mathrm{Tr}(H) H$.
3. On suppose $\mathrm{Tr}(H) \neq -1$. Montrer que $I_n + H$ est inversible et $(I_n + H)^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1 + \mathrm{Tr}(H)} H$.
4. Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(HA - 1) \neq -1$. Montrer que $A + H$ est inversible et

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \mathrm{Tr}(HA^{-1})} A^{-1} H A^{-1}$$

Exercice 20 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que si $\|u\| < 1$, alors $Id_E - u$ est inversible. (utiliser le théorème du point fixe, pour résoudre l'équation $y + u(x) = x$.)

• • • • • • • • • • •