Réduction des endomorphismes

Exercice 1 Déterminer les sous-espaces vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées et $\triangle : E \to E$ l'endomorphisme définie par $\triangle(u)(n) = u(n+1) - u(n)$. Déterminer les valeurs propres de $\triangle$.

Exercice 3 $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour f élément de E, $\varphi(f)$ est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ (\varphi(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \ \text{ si } \ x \neq 0 \ \text{ et } \ (\varphi(f))(0) = f(0).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 4 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

Exercice 5 Sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On donne trois endomorphismes f, u et v tels qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour $k \in \{1, 2, 3\}$, $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 6 Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que f soit diagonalisable. Que peut-on dire lorsque f n'est pas diagonalisable ?

Exercice 8 On considère la matrice circulaire C et la matrice J définies par les formules :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

En exprimant C comme un polynôme en la matrice J diagonaliser la matrice C.

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme admettant un polynôme minimal. Si f est inversible, montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer la matrice $AM - MA$.
2. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M \mapsto AM - MA$.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle diagonalisable.

Exercice 12 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, un entier $n \geq 2$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & & b \\ b & a & & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),$$

avec $b \neq 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable.
2. Lorsque M est inversible, calculer l'inverse de M.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer M^p.

Exercice 13 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\Phi_A(M) = AM$.

1. Montrer que les valeurs propres de Φ_A sont les valeurs propres de A.
2. Déterminer les valeurs propres de $\Psi_A : M \mapsto MA$.

Exercice 14 Soient n un entier naturel non nul, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$, M_a l'élément de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ défini par la formule

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix},$$

et U_a l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à M_a.

1. Déterminer les valeurs propres de U_a.
2. Lorsque U_a, est inversible, résoudre les équations $U_a(x) = e_j$, où $(e_1, e_2, ..., e_{n+1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. En déduire la matrice inverse de M_a lorsqu'elle existe.
3. On pose $b = \sum_{j=1}^{n} a_j$, montrer que si, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $b \neq -a_i$, U_a est diagonalisable, et déterminer une base de vecteurs propres. Exprimer ces vecteurs à l'aide des vecteurs :
$$f_0 = \sum_{j=1}^{n+1} e_j, f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2, ..., f_n = \sum_{j=1}^{n} e_j$$
4. Déterminer la matrice V_a associée à U_a dans la base $(f_0, f_1, ..., f_n)$. En déduire l'ensemble des éléments a de $\mathbb{K}^n$ tels que U_a soit diagonalisable et déterminer alors une base de vecteurs propres de U_a.

Exercice 15 Soit n un entier naturel non nul. $\mathscr{S}_n$ désignera le groupe de permutations de $\{1, 2, ..., n\}$ et pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ est sa signature. $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'en munira $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$. Étant donnée $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on considére u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ définie par : $u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$, $j \in [\![1, n]\!]$, la matrice $A_\sigma = \text{Mat}(u_\sigma, \mathscr{B})$ est dite la matrice de la permutation σ.

1. (a) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Montrer que $A_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ et que ${}^tA_\sigma = A_{\sigma^{-1}}$. ($\delta_{ij}$ désigne le symbole de Kronecker)
   (b) Si $(\sigma, \sigma') \in \mathscr{S}_n^2$, montrer que $A_{\sigma \circ \sigma'} = A_\sigma A_{\sigma'}$. En déduire que $A_\sigma \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et que $(A_\sigma)^{-1} = {}^tA_\sigma$.
2. (a) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n, \pi_\sigma$ son polynôme minimal, Montrer que si σ est un cycle de longueur r, alors $\pi_\sigma = X^r - 1$.
   (b) Si $\sigma \neq id$ quelconque, montrer que $\pi_\sigma = \text{ppcm}_{1 \leq i \leq k}(X^{r_i} - 1)$. (remarquer que σ s'écrit d'une manière unique en produit des cycles disjointes deux à deux : $\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_k$, r_i longueur du cycle σ_i).
3. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$, χ_σ le polynôme caractéristique de A_σ.
   (a) Si σ est cyclique ($\sigma^r = id$), montrer que : $\chi_\sigma = (-1)^n(X - 1)^{n-r}(X^r - 1)$.
   (b) Dans le cas général, montrer que : $\chi_\sigma = (-1)^n \prod_{i=1}^{r}(X^{r_i} - 1)$ avec : $\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_k$, r_i longueur du cycle σ_i.

4. Montrer que A_σ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en particulier montrer que si σ est un cycle d'ordre r, alors A_σ est semblable à

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & & & & \\ & \omega_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \omega_r & \\ & & & & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

où $\omega_1, \omega_2, ...\omega_r$ sont les racines n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Exercice 16 On considére un espace vectoriel E complexe de dimension $n+1$ et trois endomorphismes u, v, h de E satisfaisant aux relations suivantes :

$$(I) \;\; h \circ u - u \circ h = 2u, \;\; h \circ v - v \circ h = -2v, \;\; u \circ v - v \circ u = -h$$

1. Soit α une valeur propre de h, on considére un vecteur $x \in E$ tel que $h(x) = \alpha x$, montrer que les vecteurs $y = u(x)$ et $z = v(x)$ vérifient les relations :

$$h(y) = (\alpha + 2)y, h(z) = (\alpha - 2)z$$

En déduire que l'on a $h[u^k(x)] = (\alpha + 2k)v^k(x)$ pour tout entier k positif. Montrer qu'il existe $k \geq 0$ tel que l'on ait $u^k(x) = 0$

2. Montrer qu'il existe un nombre complexe α et un vecteur x de E non nul tels que :

$$h(x) = \alpha x, \;\; u(x) = 0$$

3. x et α étant choisis comme dans la question 2), on pose :

$$x_k = \frac{v^k(x)}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

Établir les relations :

$$h(x_k) = (\alpha - 2k)x_k, \;\; v(x_k) = (k+1)x_{k+1}$$

et

$$u(x_k) = (k - 1 - \alpha)x_{k-1}$$

4. On suppose qu'en dehors de E et de $\{0\}$ il n'existe aucun sous-espace vectoriel F tel que u, v, h appliquent F dans F lui même.
Montrer que les vecteurs x_k de 3) engendrent E, puis les x_k non nuls forment une base de E. Montrer qu'en fait les vecteurs $x_0, x_1, ...x_n$ forment une base de E, et calculer α en fonction de n.
5. On prend $E = \mathbb{C}_n[X]$.
On considére les endomorphismes u, v, h de E définis comme suit :

$$\begin{array}{rcl} u(f)(t) & = & -ntf(t) + t^2 f'(t) \\ v(f)(t) & = & f'(t) \\ h(f)(t) & = & -nf(t) + 2tf'(t) \end{array}$$

Montrer que u, v, h satisfont aux relations (I), et à la condition énoncée au début de la question 4). Calculer dans ces conditions les éléments x_k de la question 3).

•••••••••••