

Exercice 1

Déterminer toutes les normes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

- Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto N(x) = \sum_{k=1}^n k|x_k|$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto N'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{k}$.
- Montrer que N , N' et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes et représenter dans le cas $n = 2$ les boules unités correspondantes.

Exercice 3

- Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|$. A quelle condition sur les $a_1, \dots, a_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?
- Soient $f_1, \dots, f_n$ des applications continues sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Considérons l'application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x_1, \dots, x_n) = \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$. A quelle condition sur les applications $f_1, \dots, f_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 4

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5

Soient l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$ et N l'application définie sur E par $N(f) = \|3f + f'\|_\infty$.

- Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq \alpha N(f)$ pour tout $f \in E$.
- Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn et f une application linéaire de E dans F . On considère l'application

$$N : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\|_F \end{cases}$$

- Montrer que N est une semi norme sur E
- A quelle condition nécessaire et suffisante sur f , N est une norme sur E

Exercice 7

On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq |y|, x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

- Dessiner D . Montrer que D n'est pas ouvert.
- Déterminer $\overline{D}$, l'adhérence de D . On justifiera brièvement sa réponse, en s'aidant d'un dessin.

Exercice 8

- On pose $l^\infty = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. On pose $N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{4^n}$ et $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

- Montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes dans l^∞ .
 - Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes?
2. Montrer que l'espace vectoriel l^∞ muni de la norme sup est un espace vectoriel normé complet.

Exercice 9

1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme N définie par : $N(P) = \max_{k \in [0, p]} |a_k|$ si

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k. \text{ On note } P_n = 1 + \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} + \dots + \frac{X^n}{n+1}.$$

Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.

2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme dite de la convergence en moyenne : $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n(\sqrt{n} - 1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

- Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
- En déduire que l'espace vectoriel $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Exercice 10

Montrer que toute fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 11

On désigne par p_1 et p_2 les projections de $\mathbb{R}^2$ définies par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$.

- Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
- Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.
- Montrer que si F est un fermé tel que $p_1(F)$ est borné, alors $p_2(F)$ est fermé.

Exercice 12

Pour tout A partie de $\mathbb{R}$ non vide et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| / a \in A\}$$

(distance de x à A).

- Donner une interprétation géométrique de $d(x, A)$ sur la droite réelle.
- Examiner les cas où $A = [0, 1[$ et $x = 1, 2, \frac{1}{2}$ ou -3 .
- On revient au cas général. Justifier l'existence de $d(x, A)$.
- La borne inférieure $d(x, A)$ est-elle un plus petit élément? Illustrer par divers exemples.
- Calculer $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x, \mathbb{Q})$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.

Exercice 13

Soit $E = \mathcal{B}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Déterminer la distance de la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\end{cases}$$

au sous-espace vectoriel $F = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ formé des fonctions continues.

.....