Exercice 1

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$x_1 = (1,1,0,1),\ \ x_2 = (1,1,1,0),\ \ x_3 = (1,1,-2,1).$$

1. Déterminer la dimension de H et une base de son orthogonal $H^{\perp}$.
2. On note p la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n vecteurs unitaires telle que

$$\forall x \in E,\ \ \sum_{k=1}^{n}(x|e_k)^2 = \|x\|^2.$$

1. Montrer que les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est égal à E.
3. En déduire que la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$. Etant donné a, b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & (x|a)a + (x|b)b \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
3. Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de $\ker f$.
   a. Montrer que $\mathscr{B} = (a, b, e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de E.
   b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit une projection vectorielle.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Montrer que

$$\sup_{x\in E/\|x\|=1}(f(x)|x)$$

est égal à la plus grande valeur propre de f.

Exercice 5

On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On note F l'espace des fonctions affines de E et $f : [0,1] \to R$ la fonction de E définie par $f(t) = t^2$.

1. Determiner la projection orthogonale de f sur F. On la note $p_F(f)$
2. Calculer $\|f - p_F(f)\|^2$.
3. En déduire le minimum pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 6

Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique réelle d'ordre n. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $A^p = I_n$.
Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 7

Soit A une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 - 3A + 2I_n = 0,$$

Où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout élément $p \in \mathbb{N}$, on définit la matrice G_p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$G_p = \sum_{k=0}^{p} A^k.$$

1. a. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^3 - 3X + 2$.
   b. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de A ?
2. Prouver que pour tout entier p, G_p est inversible.

Exercice 8

Montrer que la matrice de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est définie positive.

Exercice 9

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de terme dominant égal à X^n.
On définit la fonction G_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall \in \mathbb{R},\ \ G_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n}(e^{\frac{-t^2}{2}})$$

où $t \mapsto \frac{d^n}{dt^n}(e^{\frac{-t^2}{2}})$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc}(.|.): & \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (P,Q) & \longmapsto & (P|Q)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt\end{array}$$

   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.
2. Montrer que G_n est un élément de $\mathscr{U}$. On notera par la suite $F = X^n - G_n(X)$.
3. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, calculer $(G_n|X^j)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$.
4. Montrer que le polynôme F est le projeté orthogonal du polynôme X^n sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
5. En déduire, en fonction de n la valeur de $\inf_{P\in\mathscr{U}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$.

Exercice 10

Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme symétrique de E, c'est-à-dire que u vérifie

$$\forall x, y \in E,\ \ (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

On note S la sphère unité de E et $\varphi : S \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(x) = (u(x)|x)$.

1. Justifier que φ atteint son maximum sur S. On désignera par x_0 un point où ce maximum est atteint.
2. Soit y un vecteur unitaire orthogonal à x_0. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose
   $$x(t) = (\cos t)x_0 + (\sin t)y \quad \text{et} \quad f(t) = (u(x(t))|x(t)).$$
   Démontrer que f admet un maximum en 0.
3. En déduire que y est orthogonal à $u(x_0)$.
4. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.

Exercice 11

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1, ..., x_n) = \left(x_i|x_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\operatorname{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \operatorname{rg}(x_1, ..., x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.
3. On suppose que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \operatorname{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x, F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$).
   Montrer que $d(x, F) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}}$.

•••••••••