Exercice 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$. Montrer que si $\lambda \sin \mathrm{Sp}(A)$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Sur $E = \mathbb{C}_2[X]$, on définit une application $(.|.)$ par :

$$(P|Q) = \overline{P(1)}Q(1) + \overline{P(i)}Q(i) + \overline{P(-i)}Q(-i).$$

1. Montrer $(.|.)$ est un produit scalaire hermitien.
2. Déterminer une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) avec $\deg P_k = k$.

Exercice 3

On définit une application $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ par : $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{i\theta})}Q(e^{i\theta})d\theta$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$ pour le produit scalaire précédent.
3. Soit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$. Calculer $\|Q\|^2$.
4. On pose $M = \sup\limits_{|z|=1} |Q(z)|$. Montrer que pour $M \geq 1$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 4

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices hermitiennes. Montrer que $\mathcal{H}_n$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner en une base. Préciser sa dimension. $\mathcal{H}_n$ est-il un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 5

1. Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}g(t)dt$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / |f|^2$ inteégrable sur $\mathbb{R}\}$.
2. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction f_n est dans E. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogoanle dans E.

Exercice 6

Soit E un espace préhilbertien complexe et f un endomorphisme de E telle que :

$$\forall x \in E, \quad (f(x)|x) = 0.$$

1. Montrer que $\forall x, y \in E, \quad f(x)|y) = 0$, puis que $f = 0$.
2. Que se passe-t-il dans le cas réel ?

Exercice 7

Sur l'espace hermitien $\mathbb{C}_3[X]$, on pose

$$(P|Q) = \overline{P(0)}Q(0) + \int_0^1 \overline{P'(t)}Q'(t)dt$$

Montrer que l'on a défini un produit scalaire et déterminer l'orthogonal de l'espace de polynômes s'annulant en i et $-i$.

Exercice 8

Soit E l'espace vectoriel des fonctions 2π périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On pose :

$$\varphi(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire hermitien sur E. On note $\varphi(f,g) = (f|g)$.
2. $\forall k \in \mathbb{Z}$, on définit $e_k \in E$ par : $e_k : x \mapsto e^{ikx}$. Vérifier que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n\leq k\leq n}$. Trouver la projection orthogonale d'un élément f de E sur F_n.

••••••••••