

Exercice 1

Étudier la convergence des séries numériques de terme général u_n , dans les cas suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n2^n}, n \in \mathbb{N}^*. \quad u_n = \frac{\ln n}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}. \quad u_n = \frac{1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}^*. \quad u_n = \frac{1}{1+2^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$u_n = \frac{1}{\ln n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$u_n = \frac{ch n}{ch 2n}; \quad u_n = \sin \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \quad u_n = e^{-\sqrt{1+n}}; \quad u_n = e^{\frac{a}{n}} - \sqrt{1 - \frac{b}{n}}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux $u_n, v_n = \frac{u_n}{1+u_n}, w_n = \ln(1+u_n)$ et $t_n = \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Exercice 3

1. Montrer que $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ est équivalent à $\frac{a}{\sqrt{n}}$ où a est un réel à préciser.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n^\alpha} t dt$ où α est un nombre réel.
3. Même question avec $u_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t dt$.

Exercice 4

Soit la série de terme général $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1, n \in \mathbb{N}^*.$

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est une série alternée.
2. En utilisant les développements limités montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Exercice 5

Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs ou nuls. Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n} \sqrt{u_n} (n \geq 1).$

Exercice 6

Soit f une fonction positive décroissante pour $x \geq 1$. On pose

$$\varphi(n) = \sum_{p=1}^n f(p) - \int_1^n f(x) dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1. Montrer que la suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (on comparera $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$).
2. APPLICATION :
 - a. Soit la série $g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ avec $\alpha > 0$. Montrer que $g(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ au voisinage de $+$.
 - b. Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.
 - c. Montrer que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n \geq 1)$ est convergente.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs satisfaisant à l'égalité :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que $\beta > 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est convergente et que si $\beta < 1$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge.
2. Que peut-on dire dans le cas $\beta = 1$?
3. Application : $u_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n}, u_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)(2n+2)}.$

Exercice 8

- Soit f une fonction continue décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Étudier la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t dt, n \in \mathbb{N}$.
- Étudier le cas particulier : $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9

- Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$ converge, et calculer sa somme.
- Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 10

- Calculer les sommes $U = \sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}, S = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$
- En utilisant $\cotan t < \frac{1}{t} < \frac{1}{\sin t}, t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.
- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ existe et qu'elle est égale à la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 11

(Théorème d'Abel) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes réels telles que :

- la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.
- la suite de terme général $B_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$ est borné.

Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.

Application : retrouver le critère de convergence spécial aux séries alternées.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} et T un endomorphisme de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

- Monter que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $l = \inf_{n \geq 1} u_n$. l est appelé rayon spectral de l'endomorphisme T .
- Si $l < 1$, montrer que $I - T$ est inversible.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{3} & \frac{6}{6} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 13

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. On pose

$$T: E \rightarrow E \\ f \mapsto T(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

- Calculer T^n avec un seul symbole d'intégration.
- Calculer la norme subordonnée $\|T^n\|$ de T^n . En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} T^n$ converge.
- On pose $\Phi(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(f)(x)$ pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que $(1 - T)\Phi(f) = f$.

Exercice 14

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $p > 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Sp}(A) \subset B_0(0,1)$ (disque unité ouvert).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$.
3. La série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge.

Exercice 15

Considérons les deux séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ avec $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série produit de Cauchy des séries numérique $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est divergente.
2. Conclure.

Exercice 16

(Théorème de Mertens) Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ une série convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}, \quad U_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad V = \sum_{k=0}^n v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^n w_k.$$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p < q$, on note $V_{p,q} = \sum_{k=p+1}^q v_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n V_n - W_n = \sum_{k=1}^n u_k V_{n-k}.$$

2. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n V_n - W_n) = 0.$$

3. Conclure.

Exercice 17

Dans E_3 espace euclidien orienté de dimension 3, on donne un vecteur $\vec{r} \neq 0$ et on considère la suite $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\vec{x}_0 \in E_3$ et $\forall n \geq 1$, $\vec{x}_n = \vec{r} \wedge \vec{x}_{n-1}$.

1. Quelle est la nature de la série $R(\vec{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \vec{x}_n$.
2. Montrer que l'application $R : \vec{x}_0 \rightarrow R(\vec{x}_0)$ est une rotation à préciser.

Exercice 18

En utilisant le résultat de l'exercice, montrer les deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ ($\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$) sont convergentes.

Exercice 19

Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Même question avec

$$u_n = \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 20

On considère la fonction ζ de Riemann, définie, pour $x \in]1, +\infty[$, par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Démontrer les relations suivantes :

1. $\sum_{p=2}^{\infty} (\zeta(p) - 1) = 1$ et $\sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p (\zeta(p) - 1) = \frac{1}{2}$.
2. $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\zeta(p) - 1}{p} = 1 - \gamma$ et $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \zeta(p) = \gamma$.

γ étant la constante d'Euler.

•••••