

Exercice 1

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I . Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a , alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice 2

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ sur $] -1, 1[$, puis sur $[-a, a]$ avec $0 \leq a < 1$.
2. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, sur $[0, 1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, \infty[$, avec $a > 0$.

Exercice 3

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1 - x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice 4

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 5

On définit une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2} (x - (f_n(x))^2).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^n.$$
3. En déduire que la convergence est uniforme sur I .

Exercice 6

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.

7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7

Pour $x \in I = [0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = n^n x^n (1 - x)$.

- Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n . On notera dans la suite S la somme de la série.
- Étudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n .
- On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer S sur $[0, 1]$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
- On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I .

Exercice 8

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
- La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 9

Soit $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, \infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

- Étudier la convergence simple de la suite.
 - Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, \infty[$, avec $a > 0$.
 - On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, \infty[$.

2. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$.

- Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, \infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, \infty[$ avec $a > 0$.
- Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
 - la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
 - la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0, \infty[$.

Exercice 10

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

- Prouver que S est définie sur $I =]-1, \infty[$.
- Prouver que S est continue sur I .
- Prouver que S est dérivable sur I , calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I .
- Quelle est la limite de S en -1 ? en ∞ ?

Exercice 11

Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

- Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 12

Soit f la fonction déterminée par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{1}{n!} \arccos(\cos nx)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $] -\infty, +\infty[$. Calculer $f(\pi)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Montrer que, p étant un entier positif,

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{p}\right], \quad 0 < ex - f(x) < \frac{(p+1)!x}{pp!}.$$
3. La fonction f est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 13

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a $\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}$. En déduire que $\zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1}$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe représentative de ζ .

Exercice 14

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par $f_n(t) = \frac{1}{n} t^n \sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.
2. Soit $a \in]0, 1[$.
 - a. Montrer que la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
 - b. En déduire que la fonction $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et montrer que, pour $x \in] -1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}.$$

- c. Montrer que $f(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$ pour $t \in] -1, 1[$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1, 1]$, $A_n(t) = \sum_{k=1}^n t^k \sin kt$.

- a. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1, 1]$ on ait $|A_n(t)| \leq M$.

- b. Montrer en écrivant $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que

$$\sum_{k=1}^n \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$

- c. En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$ et que $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1, 1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.

- d. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 15

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. On pose

$$\begin{aligned} T: E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto T(f): x \longmapsto \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

1. Calculer T^n avec un seul symbole d'intégration.
2. Calculer la norme subordonnée $\|T^n\|$ de T^n .
3. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} T^n$ converge.
4. On pose $\Phi(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(f)(x)$ pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que $(Id_E - T)\Phi(f) = f$.

.....