

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie, et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable en 0. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$. Montrer que l'application f est linéaire.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ une application continue à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

1. f est dérivable en 0;
2. $x \mapsto \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet une limite en 0 dans E .

Exercice 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes réelles $\alpha > 1$ et $K \geq 0$ telle que $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$. Montrer que f est constante.

Exercice 4

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(t) = \begin{cases} \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) & \text{si } -1 < t < 0 \\ (0, 0) & \text{si } 0 \leq t < 1. \end{cases}$

Montrer que la fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et que $f'([-1, 1[)$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \det(i + tf)$$

où i est l'identité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 7

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme définie par : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$.

Soient B et H deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit k un entier, $k \geq 1$, soit g_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$g_k(x) = (B + xH)^k.$$

Les deux matrices B et H ne sont pas supposées commutables.

1. Établir que la fonction g_k est continûment dérivable ; calculer sa dérivée.
2. En déduire l'inégalité :

$$\|(B + H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$

Exercice 8

Soit $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant pour tout $t \in I$, $\vec{f}''(t) \in \text{Vect} \vec{f}(t)$.

1. Montrer que l'application $t \mapsto \vec{\sigma}(t) = \vec{f}(t) \wedge \vec{f}'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $\vec{f}(t_0)$ et $\vec{f}'(t_0)$ ne soit pas colinéaires. Montrer qu'il existe alors un plan de $\mathbb{R}^3$ contenant les valeurs prises par $\vec{f}(t)$.
3. On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $\vec{f}(t_0)$ et $\vec{f}'(t_0)$ sont colinéaires. On suppose de plus que $\vec{f}(t)$ ne s'annule pas. Montrer qu'il existe alors une droite de $\mathbb{R}^3$ contenant les valeurs prises par $\vec{f}(t)$.

.....