Calcul différentiel

Prof : M.TARQI
Année scolaire 13/14

Série $n^\circ 4$

Exercice 1

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

1. $g(x,y) = f(y,x)$.
2. $g(x) = f(x,x)$.
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$.
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$

Exercice 2

Calculer la différentielle de l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
5. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$. La fonction F admet-elle une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$?

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 5

On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2))$$

et

$$g(u,v,w) = uvw$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1.), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $Jf(x,y)$ et $Jg(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. En quels points l'application $x \longmapsto \|x\|_2$ est-elle différentielle ?
2. Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice 7

1. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \operatorname{Tr}(M^3)$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer la différentielle de f en tout point M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ de l'application $f : M \to M^{-1}$.

Exercice 8

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$.

1. Montrer pour une telle fonction l'identité d'Euler :
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x) \quad (1)$$
2. Montrer que (1) caractérise les fonctions homogènes de degré r.
3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice d'ordre n, et soit $\det(A) = f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ développement par rapport à la première ligne.

   Montrer que $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{1i} \frac{\partial f}{\partial a_{1i}}(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est l'application linéaire nulle.
2. Montrer que f ainsi que ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 existent en chaque point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
4. Que peut-on dire de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Conclure.

Exercice 10

Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \to (u+v, uv)$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u < v\}$ vers un ouvert V que l'on précisera.

Exercice 11

Déterminer les extremums locaux et globaux des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. $f_2(x,y) = \arctan xy$
3. $f_3(x,y) = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$
4. $f_5(x,y) = \sin x \sin y$

Exercice 12

Étudier les extremums locaux et globaux des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

1. $f_1(x,y,z) = x^2y + y^2z + 2x - z$
2. $f_2(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$.

Exercice 13

Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, en réalisant le changement de variables $(x,y) \to (u = 2x+y, v = 3x+y)$.

Exercice 14

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f$

Exercice 15

Soit E un espace de Banach. Notons I l'application identique de E et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|v\| < 1$. Montrer que $I - v$ est inversible et exprimer son inverse. Indication : résoudre l'équation $x - u(x) = y$ où y est fixé.

Exercice 16

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases} \end{array}$.

1. Étudier la continuité de f.
2. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

Exercice 17

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a,$$

où a est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$.
   En utilisant le théorème de composition, montrer que
   $$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}.$$
2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 18

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx,ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$.
   a. Montrer que pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$
   b. En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = \alpha x + \beta y$.

Exercice 19

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation (1)

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

couplée à la condition initiale

$$(2)\quad u(0,x,y) = h(x,y).$$

où $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ et où l'inconnue est $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

1. On suppose d'abord que $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ vérifie l'équation (1). Pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer une application (non constante)
   $\gamma_X : R \to \mathbb{R}^3$ telle que u soit contant le long de la courbe $t \to X(t)$ (c'est à dire que $u \circ \gamma_X$ est une constante) et telle que $\gamma_X(0) = (0,x,y)$.
2. Montrer que $\Gamma : (t,x,y) \mapsto \gamma_{(x,y)}(t)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.
   (3) Montrez que l'équation (1) possède une unique solution $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ vérifiant la condition (2).

• • • • • • • • • • •