Exercice 1

Montrer que l'égalité $f(x,y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1 = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\varphi : x \longmapsto y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(-1) = 1$, donner un développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de -1.

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que $|ab| < 1$.

1. Soit $v \in \mathbb{R}$. On définit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = x + a\sin(v - b\sin x)$. Démontrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$. Démontrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Montrer que l'égalité $f(x,y,z) = x + y + z + sin(xyz) = 0$ définit, au voisinage de $(0,0,0)$, une fonction implicite $\varphi : (x,y) \to \varphi(x,y) = z$ telle que $\varphi((0,0)) = 0$.
Donner la formule de Taylor de φ, à l'ordre 2, au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 4

Soit $f : (x,y) \longmapsto x + 2y$ définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 5\}$

1. Justifier que f est continue et présente des extremums sur D.
2. Déterminer ses valeurs.

Exercice 5

Soit f une fonction convexe différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

Exercice 6

Soit $\mathscr{D}$ la domaine des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En déduire que f admet des extrema sur $\mathscr{D}$.
2. Déterminer les points critiques de f
3. Déterminer le minimum et le maximum de f sur le bord de $\mathscr{D}$.
4. En déduire le minimum et maximum de f sur la domaine $\mathscr{D}$. .

Exercice 7

Déterminer les extrema de la fonction $f(x,y,z) = x + y + z$ sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8

Déterminer parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume fixé (res. surface fixée) celui qui a la plus petite surface (res. le plus grand volume).

Exercice 9

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy}$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 10

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 x_2 ... x_n.$$
On note $\Gamma = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n / x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\}$.

1. Démontrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a
$$(x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

•••••••••••