Exercice 1

On considère un entier naturel n non nul et une application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus h non constante.
Pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, on définit l'application

$$f_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_k(x) = (h(x))^k. \end{array}$$

Montrer que la famille $S = (f_0, f_1, ..., f_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère un entier n non nul et on note E l'ensemble des polynômes de degré inférieure ou égal à n. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées dans cette base des polynômes $P = 1$ et $Q = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et on considère l'ensemble

$$F = \{P \in E / P(1) = 0\}.$$

1. Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P associe $P(1)$ est linéaire. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer la dimension et donner une base de F.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par :

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \quad f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, f_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer la base (f_1, f_2, f_3) de E dont elle est la base duale.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère la famille $\mathscr{F} = f_0, f_1, f_2, f_3$ d'éléments de E^* définis, pour $j = 0, ..., 3$, par

$$\forall P \in E, \quad f_j(P) = P(j).$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est une base de E^*.
2. Déterminer la base $\mathscr{B}$ de E dont F est la base duale.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $\mathscr{B} = 1, X, ..., X^n$. Pour tout i de $\{0, ..., n\}$, on définit une forme linéaire f_i sur E par

$$\forall j \in \{0, ..., n\}, \quad f_i(X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1. Démontrer que $(f_0, ..., f_n)$ est une base de E^*.
2. On considère les deux éléments φ et ϕ de E^* définis par, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = P(1)$ et $\phi(P) = P'(0)$. Déterminer les coordonnées de chacune des formes φ et ϕ dans la base $(f_0, ..., f_n)$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & C_n^n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On associant à M un endomorphisme, montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 8

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9

1. a. Soit $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \text{Tr}(AX)$.
   b. En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.
2. Déterminer les éléments $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ tels que pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(XY) = f(YX)$.

Exercice 10

1. Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer $\dim\ker(A - I_n) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \text{Tr}(A^k)$.

Exercice 11

Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe des matrices $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = U{}^tV$.
2. En déduire $H^2 = \text{Tr}(H)H$.
3. On suppose $\text{Tr}(H) \neq -1$. Montrer que $I_n + H$ est inversible et $(I_n + H)^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1 + \text{Tr}(H)}H$.
4. Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(HA - 1) \neq -1$. Montrer que $A + H$ est inversible et
$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \text{Tr}(HA^{-1})}A^{-1}HA^{-1}$$

Exercice 12

Une transvection d'un espace vectoriel E est une application $f : E \longrightarrow E$ de la forme
$$x \longmapsto x + \gamma(x)u$$
où u est un vecteur donné non nul de E et γ est une forme linéaire sur E telle que $\gamma(u) = 0$.

1. Démontrer que toute transvection f de E est un endomorphisme vérifiant :
$$(f - id_E) \circ (f - id_E) = 0.$$
2. Réciproquement, soit g un endomorphisme de E vérifiant :
$$(*) \quad (g - id_E) \circ (g - id_E) = 0.$$
   a. Vérifier que l'on a : $\text{Im}(g - id_E) \subset \ker(g - id_E)$.
   b. Démontrer dans le cas $\dim(E) = 2$ ou 3, on a forcément : $g = id_E$ ou $\dim(\text{Im}(g - id_E)) = 1$.
   c. Déduire que si $\dim E = 2$ ou 3 alors g est une transvection.
   d. Dans le cas où $\dim E \geq 4$, définir un endomorphisme g vérifiant $(*)$ et qui n'est pas une tranvection.

• • • • • • • • • • •