Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des applications définies de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

.

1. Déterminer une relation entre f_n et f_n'.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la famille $S = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ est une famille libre de E.

Exercice 2

Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées et $\triangle : E \to E$ l'endomorphisme définie par $\triangle(u)(n) = u(n+1) - u(n)$. Déterminer les valeurs propres de $\triangle$.

Exercice 3

Diagonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 5

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme non nul de E, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

1. Montrer que f n'est pas injectif.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 6

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres réelles de A.
2. a. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   b. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 7

Soit a un réel non nul et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une relation entre A et A^2.
2. En déduire les valeurs et les sous-espaces propres de A.
3. Vérifier que A est diagonalisable.

Exercice 8

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \longmapsto a + b\cos x + c\sin x + d\cos(2x) + e\sin(2x)$$

avec a, b, c, d, e des réels.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dimension.

2. On définit l'application φ qui à tout P de E associe l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_0^{\pi} \cos(x+t)P(t)dt.$$
   a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   b. Déterminer les images par φ des applications $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin(x)$. Quel est le rang de φ ?
   c. L'endomorphisme φ de E est-il diagonalisable ?

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors λ^3 est valeur propre de A^3.
2. a. Soit j le nombre complexe défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$
$$A^3 - \lambda^3 I = (A - \lambda I)(A - \lambda j I)(A - \lambda j^2 I).$$
   b. En déduire que, si μ est une valeur propre de A^3, il existe une valeur propre λ_0 de A telle que $\lambda_0^3 = \mu$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit L une matrice ligne non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et C une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note A la matrice $A = CL$.

1. a. Exprimer le réel LC en fonction des coefficients de L et de C.
   b. Déterminer le rang de la matrice A.
   c. Calculer le produit AC en fonction de LC et C.
2. Déterminer une relation entre A^2 et A. En déduire les valeurs propres de A.
3. a. Montrer que $A + I_n$ est inversible si, et seulement si, $LC + 1$ est non nul.
   b. Dans le cas où $LC + 1$ est non nul, déterminer l'inverse de $A + I_n$.

Exercice 11

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de rang 1 ($n \geq 1$).

1. Montrer que tout vecteur non nul de l'image de f est un vecteur propre de f.
2. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $f^2 \neq 0$.

Exercice 12

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère $A = (a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ et $B = (b_1, b_2, ..., b_{n-1})$ deux éléments non nuls de $\mathbb{C}^{n-1}$. On note $S = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de f.
2. a. Déterminer les valeurs propres de f.
   b. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, S est non nul.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \ \phi(X) = AX - XB.$$
On désigne par α (resp. β) une valeur propre de la matrice A (resp. B).

1. Vérifier que ϕ est endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe des matrices colonnes non nulles C et D telles que $AC = \alpha C$ et ${}^tBD = \beta D$.
3. Calculer $\phi(C^tD)$ en fonction de C, D et β.
4. En déduire que $\alpha - \beta$ est valeur propre de l'endomorphisme ϕ.

•••••••••••