Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto P(1)Q'(0)+P'(0)Q(1)$ définit une forme bilinéaire sur $E=\mathbb{R}[X]$. Est-ce un produit scalaire ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a,b,c et d pour que l'application :
$$(x,y)\mapsto ax_1y_1+bx_1y_2+cx_2y_1+dx_2y_2$$
définisse un produit scalaire sur $E=\mathbb{R}^2$.
3. Soient n entier naturel non nul, $x_0,\dots,x_n$ des réels deux à deux distincts et $w\in\mathbb{R}^{n+1}$. A quelle condition sur w l'application :
$$\varphi : (P,Q)\mapsto \sum_{i=0}^{n} w_iP(x_i)Q(x_i)$$
définit-elle un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 2

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'application φ définie par : $(P,Q)\longmapsto \sum_{k=0}^{n} P(i)Q(i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $E=\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'application $(f,g)\mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)dt$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 3

Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $E=\mathbb{R}^4$ et $q(x,y,z,t)=xy+yz+zt+tx$.
2. $E=\mathbb{R}^3$ et $q(x,y,z)=6x^2+3y^2+3z^2-8xy-8xz-6yz$.
3. $E=\mathbb{R}^n$ et $q(x)=\sum_{1\le i,j\le n}\mathrm{Min}(i,j)x_ix_j$.
4. $E=\mathbb{R}^n$ et $q(x)=\sum_{1\le i,j\le n}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}x_ix_j$ où $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ sont des réels distincts et strictement positifs.

Exercice 4

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. a. On se donne un entier $n\ge 1$ et des réels $x_1,\dots,x_n$ strictement positifs. Montrer que $n^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$.
Dans quel cas a-t-on égalité ?
   b. En déduire $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\ge\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.
2. Soit f une fonction sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   a. Montrer que $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2\le(b-a)\int_0^b f^2(t)dt$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
   b. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que $\left(\int_a^b\frac{dt}{f(t)}\right)\left(\int_a^b f(t)dt\right)\ge(b-a)^2$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 5

Soit $X=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application q telle que
$$q(X)=\det X-\frac{1}{4}(\mathrm{Tr}\,X)^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique dégénérée associée à une forme bilinéaire. Quelle est sa signature ? Exprimer q à l'aide de $\mathrm{Tr}\,X$ et $\mathrm{Tr}\,X^2$.
2. Déterminer $\ker f$. Que peut-on dire des valeurs propres de X si l'on soit $q(X)>0$, soit $q(X)<0$, soit $q(X)=0$.

Exercice 6

Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto(P|Q)=\int_0^2(2-t)P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Donner une base orthonormée.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur $[-1,1]$. Pour f et g de E, on pose $\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.
3. Soit $\phi : f \to \widehat{f}$ avec $\widehat{f} : x \to f(-x)$. Montrer que ϕ est la symétrie orthogonal par rapport à $\mathcal{P}$

Exercice 8

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application qui, à tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe le scalaire $\mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
2. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques et le sous-espaces des matrices antisymétriques sont orthogonaux et supplémentaires vis-à-vis de ce produit scalaire.

Exercice 9

Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ n fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $a_{ij} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)dt$ puis pour $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(x_1,...,x_n) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j.$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique positive.
2. Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre.
3. Écrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier :
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ \forall t \in [a,b],\ \ f_i(t) = t^{i-1}.$$

Exercice 10

On considère une forme quadratique q sur E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$q(x) = \Phi(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j.$$

1. a. <u>Premier cas : la forme quadratique contient un terme au carré x_i^2.</u>
   Pour fixer les idées, supposons que $a_{11} \neq 0$. Démontrer qu'il existe une forme linéaire l sur E et une forme quadratique q_1 sur E, vérifiant $q_1(x) = \Psi(x_2,x_3,...,x_n)$, telle que
   $$(1)\quad q(x) = \frac{1}{a_{11}}[l(x)]^2 + q_1(x).$$
   Exprimer $l(x)$ à l'aide de $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x_1,x_2,...,x_n)$. (Considérer Φ comme un trinôme du second degré en x_1).

   b. <u>Second cas : la forme quadratique contient un terme au carré x_i^2.</u>
   Pour fixer les idées, supposons que $a_{12} \neq 0$. Démontrer qu'il existe deux formes linéaires l_1 et l_2 sur E et une forme quadratique q_1, vérifiant $q_1(x) = \Psi(x_3,x_4,...,x_n)$, telles que
   $$(2)\quad q(x) = \frac{2}{a_{12}}l_1(x)l_2(x) + q_1(x).$$
   Exprimer $l_1(x)$ et $l_2(x)$ à l'aide de $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x_1,x_2,...,x_n)$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1,x_2,...,x_n)$.
   (Écrire $\Phi(x_1,x_2,...,x_n) - 2a_{12}x_1x_2$ en isolant les termes contenant x_1 et les termes contenant x_2).
2. Déduire des formules (1) et (2) une méthode de décomposition d'une forme quadratique en carrés linéairement indépendantes appelée méthode de Gauss. Quel est le nombre des carrés linéairement indépendantes obtenus ? (Si on utilise la formule (2) on remarquera que
   $$4l_1(x)l_2(x) = [l_1(x) + l_2(x)]^2 - [l_1(x) - l_2(x)]^2$$
   et on démontrera que l_1 et l_2 sont indépendantes ainsi que $l_1 + l_2$ et $l_1 - l_2$).
3. Démontrer que la méthode précédente est aussi une méthode de construction d'une base orthogonale relative à la forme quadratique considéré.
4. Exemple d'application : Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ réduisant la forme quadratique dont l'expression, dans la base canonique de $\{e_1,e_2,e_3\}$, est
   $$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz.$$

•••••••••••