FORMES BILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si f deux formes linéaires de E. Montrer que l'application $x \mapsto q(x) = f(x)g(x)$ est une forme quadratique sur E.
2. Soit q une forme quadratique et H un hyperplan. On suppose que pour tout $x \in H$, $q(x) = 0$. Montrer que q est le produit de deux formes linéaires.

Exercice 2 Établir que l'application $P \mapsto q(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)P'(t)dt$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$ et exprimer sa forme polaire.

Exercice 3 On considère une forme quadratique q sur E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$q(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j.$$

1. Si $a_{11} \neq 0$, démontrer qu'il existe une forme linéaire l sur E et une forme quadratique q_1 sur E, vérifiant $q_1(x) = \Psi(x_2, x_3, ..., x_n)$, telle que
$$(1) \quad q(x) = \frac{1}{a_{11}}[l(x)]^2 + q_1(x).$$
Exprimer $l(x)$ à l'aide de $\Phi'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n)$. (Considérer Φ comme un trinôme du second degré en x_1).
2. Si $a_{11} = 0$ et $a_{12} \neq 0$, démontrer qu'il existe deux formes linéaires l_1 et l_2 sur E et une forme quadratique q_1, vérifiant $q_1(x) = \Psi(x_3, x_4, ..., x_n)$, telles que
$$(2) \quad q(x) = \frac{2}{a_{12}}l_1(x)l_2(x) + q_1(x).$$
Exprimer $l_1(x)$ et $l_2(x)$ à l'aide de $\Phi'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\Phi'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
(Écrire $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) - 2a_{12}x_1x_2$ en isolant les termes contenant x_1 et les termes contenant x_2).
3. Déduire des formules (1) et (2) une méthode de décomposition d'une forme quadratique en carrés linéairement indépendantes appelée méthode de GAUSS. Quel est le nombre des carrés linéairement indépendantes obtenus ? (Si on utilise la formule (2) on remarquera que
$$4l_1(x)l_2(x) = [l_1(x) + l_2(x)]^2 - [l_1(x) - l_2(x)]^2$$
et on démontrera que l_1 et l_2 sont indépendantes ainsi que $l_1 + l_2$ et $l_1 - l_2$).
4. Démontrer que la méthode précédente est aussi une méthode de construction d'une base orthogonale relative à la forme quadratique considéré.
5. Exemple d'application : Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ réduisant la forme quadratique dont l'expression, dans la base canonique de $\{e_1, e_2, e_3\}$, est
$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz.$$

Exercice 4 Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $E = \mathbb{R}^4$ et $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$.
2. $E = \mathbb{R}^n$ et $q(x) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}x_ix_j$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels > 0 distincts.
3. $E = \mathbb{R}^n$ et $q(x) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j)x_ix_j$.

Exercice 5 On considère les deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_1(x,y) = x^2 + y + 1 \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x + y^2 + 1$$

puis la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x,y) = \frac{1}{2}\left[(f_1(x,y))^2 + (f_2(x,y))^2\right]$.

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
2. Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les points critiques de F peut se mettre sous la forme
$$\begin{cases} 2x^3 + 2xy + 3x + y^2 + 1 = 0 \\ (x-y)(2x^2 + 2xy + 2y^2 - x - y + 3) = 0 \end{cases}$$
3. On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - x - y + \frac{1}{6}$.
   (a) Dire pourquoi f n'est pas une forme quadratique.
   (b) On pose $X = x - \dfrac{1}{6}$ et $Y = y - \dfrac{1}{6}$, puis $q(X,Y) = f(x,y)$.
      i. Montrer que q est alors une forme quadratique en (X,Y).
      ii. Réduire la forme quadratique q par la méthode de Gauss.
      iii. Établir, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité : $2x^2 + 2xy + 2y^2 - x - y + 3 > 0$.
4. En déduire que l'unique point critique de F est $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$.
5. Déterminer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la hessienne de F, et en déduire que F présente un minimum local en $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$.

Exercice 6 Soit $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application q telle que

$$q(X) = \det X - \frac{1}{4}(\operatorname{Tr} X)^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique dégénérée. Quelle est sa signature ? Exprimer q à l'aide de $\operatorname{Tr} X$ et $\operatorname{Tr} X^2$.
2. Définir la forme bilinéaire associée f. déterminer $\ker f$. Que peut-on dire des valeurs propres de X si l'on soit $q(X) > 0$, soit $q(X) < 0$, soit $q(X) = 0$.

Exercice 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application φ définie par : $(P,Q) \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P(i)Q(i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $E = \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer que l'application : $\varphi(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)dt$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 8 Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application qui, à tout couple (A,B) d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe le scalaire $\operatorname{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
2. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques et le sous-espaces des matrices antisymétriques sont orthogonaux et supplémentaires vis-à-vis de ce produit scalaire.

Exercice 9 Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ n fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $b_{ij} = \displaystyle\int_a^b f_i(t)f_j(t)dt$ puis pour $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{1 \le i,j \le n} b_{ij}x_ix_j$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique positive.
2. Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre.
3. Écrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall t \in [a,b], f_i(t) = t^{i-1}$.

• • • • • • • • • • •