Exercice 1

Soit G un groupe multiplicatif non trivial d'élément neutre e . Soit $x \in G$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Un sous-groupe fini de G contient x .
2. Le groupe engendré par x est fini.
3. Il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = e$.

Exercice 2

Soit $(E, \cdot)$ un monoïde avec E un ensemble fini. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Montrer que $(E, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 3

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux supérieurs ou égales à 2. Montrer qu'il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que $u_0 a - v_0 b = 1$, avec $u_0 < b$ et $v_0 < a$ (*) et exprimer en fonction de u_0, v_0, a et b tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}$ solutions de $ua - vb = 1$.
2. Déterminer deux entiers u et v vérifiant $47u + 11v = 1$.

Exercice 4

Soient m et n deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes. En déduire que : $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. ($\varphi(n) = \text{card}\{k / 1 \leq k \leq n \text{ et } n \wedge k = 1\}$)
2. Soit p un nombre premier, calculer $\varphi(p^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, en déduire $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un endomorphisme de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = x$. Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.

Exercice 6

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif fini. Calculer $\prod_{x \in \mathbb{K}^*} x$.

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

- a) $3x + 5 = 0$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ b) $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ c) $x^2 + 2x + 2 = 0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Exercice 8

Résoudre les systèmes suivantes :

- a) $\begin{cases} x \equiv 1[6] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x \equiv 2[5] \\ 5x \equiv 1[6] \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y \equiv 4[11] \\ xy \equiv 10[11] \end{cases}$

Exercice 9

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1. Montrer que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, +, \cdot)$ n'est pas un corps.
2. Montrer que le diagonale de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{K}$.

Exercice 10

Soit A un anneau tel que : $\forall x \in A, x^2 = x$. Démontrer que A est de caractéristique 2, et que A est commutatif.

Exercice 11

Soit A l'ensemble défini par :

$$A = \{z \in \mathbb{C} / \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } z = a + jb\}$$

avec $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

1. Montrer que A muni de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ est un anneau commutatif.
2. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de A est l'ensemble U défini par : $U = \{z \in A / |z| = 1\}$

Exercice 12

On considère $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Soit $\alpha = \sqrt[3]{2}$ ($\alpha \notin \mathbb{Q}$).

1. Montrer que les nombres $1, \alpha, \alpha^2$ sont linéairement indépendants. En utilisant $\alpha^3 = 2$, on montrera que toute relation de dépendance linéaire entraînerait que α soit rationnel.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel L de $\mathbb{R}$ engendré par $1, \alpha, \alpha^2$ est un sous-anneau intègre de $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in L^*$. Montrer que l'application de L dans lui-même qui à y associe xy est une bijection. En déduire que L est un corps. Donner l'expression de l'inverse de $x \neq 0$

Exercice 13

Soit I un idéal de l'anneau commutatif A . On appelle radical de I , noté $\sqrt{I}$, l'ensemble $\{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x^n \in I\}$.

1. Démontrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I .
2. Si $I \subset J$ démontrer que $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$. En déduire que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

•••••