Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est continue si, et seulement si, , pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 2

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et f une application de E dans F vérifiant : $\forall(x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ et f bornée sur la boule unité.
Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 3

Soit K une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un triangle inclus dans K d'aire maximale.

Exercice 4

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé E tel que $H = \ker f$ où f est une forme linéaire non nulle.
Montrer l'équivalence : f continue si et seulement si H non dense dans E.

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on suppose que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tendant vers 0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Montrer que f est continue.

Exercice 6

Exercice 68. Applications linéaires continues Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$. On pose $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|_E \neq 0} \|u(x)\|_F$.

1. Montrer que $|||u|||$ existe et que c'est un maximum.
2. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, appelée subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.
3. Montrer que : $\forall x \in E, \|u(x)\| \le |||u||| \times \|x\|$.
4. En déduire que : $\forall u, v \in \mathscr{L}_c(E)$, $|||u \circ v||| \le |||u||| \times |||v|||$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle sur E, on pose $H = \ker f$. Montrer que $d(x,H) = \dfrac{|f(x)|}{|||f|||}$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel normé, A un compact de E et f une application de A dans A telle que :
$$\forall(x,y) \in A^2, (x \neq y) \;\; d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$
Prouver que f a un point fixe (c'est-à-dire il existe un élément $z \in A$ tel que $f(z) = z$). (procéder par l'absurde en supposant que $c = \inf\{d(x, f(x)), x \in A\} > 0$).

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E ; on pose $d(x,F) = a$.
Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,y)$.

Exercice 10

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(f_j)_{1\le j\le p}$ des bases de E et F respectivement. Soit A la matrice de $f \in \mathcal{L}(E,F)$, calculer $|||f|||$ dans les cas suivants :

1. E et F munis de la norme 1 : $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ (sur E) et $\|y\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} |y_i|$ (sur F).
2. E et F munis de la norme ∞ : $\|x\|_1 = \sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$ (sur E) et $\|y\|_1 = \sup\limits_{j\in[\![1,n]\!]} |y_i|$ (sur F).

Exercice 11

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et u l'endomorphisme qui envoie $f \in E$ sur la fonction $u(f) : x \mapsto f(x) - f(0)$.

1. Montrer que l'endomorphisme u est continu sur $(E, \|.\|_\infty)$ et calculer sa norme.
2. On définit la norme $\|.\|_1 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$. Montrer que l'endomorphisme u n'est pas continu sur $(E, \|.\|_1)$.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant
$$\forall x \in E, \;\; \|u(x)\| \le \|x\|.$$
Montrer que $\ker(u - Id_E)$ et $\mathrm{Im}(u - Id_E)$ sont supplémentaires.

Exercice 13

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit T l'application de E de E définie par : E
$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], \;\; T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$
Montrer que T est linéaire continue, et calculer $|||T|||$.
Même question pour l'application
$$S(f) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt$$
où $\varphi \in E$.

Exercice 14

1. Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et f une application de A dans A

telle que : il existe $k \in [0,1[$ tel que, pour tout couple (x,y) de A^2 :
$$\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|.$$
Montrer que f admet un point fixe $a \in A$ et un seul, qui est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A définie par :
$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$
Indication : Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Application : En étudiant l'application : $T : f \longrightarrow T(f)$ définie sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$, par :
$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x \sin(tf(t))dt,$$
montrer que l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ $\begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une solution unique dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

3. a. Montrer que si f est continue et s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que f^r soit contranctante, alors f a un point fixe unique.

   b. Soit $X = (\mathscr{C}^1([0,1]), N)$ avec $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par
$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt\,.$$
   On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x-x^2)$.

Exercice 15

Soit A une partie compacte d'un espace normé $(E, \|.\|)$ et $f : A \to A$ telle que :
$$\forall x,y \in A, x \neq y \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|.$$

1. Montrer que f n'est pas nécessairement une contraction.
2. Montrer que f possède un unique point fixe (on pourra considérer $\varphi(x) = \|x - f(x)\|$).
3. Montrer que, $\forall a \in A$ la suite $(f^{(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.
4. Si A est un convexe compact d'un espace vectoriel normé et f vérifie
$$\forall x,y \in A, \ \|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|,$$
montrer que f possède au moins un point fixe, et que l'hypothèse de convexité est indispensable.

•••••••••••