Complément d'algèbre linéaire

Exercice 1

On considère un entier naturel n non nul et une application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus h non constante.
Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, on définit l'application

$$f_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_k(x) = (h(x))^k. \end{array}$$

Montrer que la famille $S = (f_0, f_1, ..., f_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère un entier n non nul et on note E l'ensemble des polynômes de degré inférieure ou égal à n. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on définit le polynôme $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées dans cette base des polynômes $P = 1$ et $Q = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et on considère l'ensemble

$$F = \{P \in E / P(1) = 0\}.$$

1. Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P associe $P(1)$ est linéaire. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer la dimension et donner une base de F.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $\mathscr{B} = 1, X, ..., X^n$. Pour tout i de $\{0, ..., n\}$, on définit une forme linéaire f_i sur E par

$$\forall j \in \{0, ..., n\},\ \ f_i(X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1. Démontrer que $(f_0, ..., f_n)$ est une base de E^*.
2. On considère les deux éléments φ et ϕ de E^* définis par, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = P(1)$ et $\phi(P) = P'(0)$. Déterminer les coordonnées de chacune des formes φ et ϕ dans la base $(f_0, ..., f_n)$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & C_n^n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On associant à M un endomorphisme, montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 6

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

1. a. Soit $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.
   b. En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.
2. Déterminer les éléments $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ tels que pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(XY) = f(YX)$.

Exercice 8

1. Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer $\dim\ker(A - I_n) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{Tr}(A^k)$.

Exercice 9

Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe des matrices $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = U^tV$.
2. En déduire $H^2 = \mathrm{Tr}(H)H$.
3. On suppose $\mathrm{Tr}(H) \neq -1$. Montrer que $I_n + H$ est inversible et $(I_n + H)^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1 + \mathrm{Tr}(H)}H$.
4. Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(HA - 1) \neq -1$. Montrer que $A + H$ est inversible et
$$(A+H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \mathrm{Tr}(HA^{-1})}A^{-1}HA^{-1}$$

Exercice 10

Une transvection d'un espace vectoriel E est une application $f : E \longrightarrow E$ de la forme

$$x \longmapsto x + \gamma(x)u$$

où u est un vecteur donné non nul de E et γ est une forme linéaire sur E telle que $\gamma(u) = 0$.

1. Démontrer que toute transvection f de E est un endomorphisme vérifiant :
$$(f - id_E) \circ (f - id_E) = 0.$$
2. Réciproquement, soit g un endomorphisme de E vérifiant :
$$(*) \quad (g - id_E) \circ (g - id_E) = 0.$$
   a. Vérifier que l'on a : $\mathrm{Im}(g - id_E) \subset \ker(g - id_E)$.

b. Démontrer dans le cas $\dim(E) = 2$ ou 3, on a forcément : $g = id_E$ ou $\dim(\mathrm{Im}(g - id_E)) = 1$.

c. Déduire que si $\dim E = 2$ ou 3 alors g est une transvection.

d. Dans le cas où $\dim E \geq 4$, définir un endomorphisme g vérifiant $(*)$ et qui n'est pas une tranvection.

Exercice 11

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$. On suppose que les points x_i sont deux à deux distincts.

1. Soit $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n$.
   a. Montrer qu'il existe un unique polynôme l_i de degré n vérifiant
   $$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq n.$$
   b. Montrer que la famille $(l_i)_{0\leq i\leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n)

On définit le polynôme p_n par
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

2. Que peut-on dire du polynôme p_n ?

On définit maintenant π_{n+1} le polynôme de degré $n+1$ par
$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

3. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq i \leq n$.
   a. Calculer $\pi'_{n+1}(x)$ et en déduire $\pi'_{n+1}(xi)$.
   b. Calculer $l_i(x)$ en fonction de $\pi_{n+1}(x)$ et de $\pi_{n+1}(x_i)$.
   c. En déduire que
   $$p_n(x) = \pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x - x_i)\pi'_{n+1}(x_i)}.$$

4.. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$ et en déduire que
$$p_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-xi)\pi'_{n+1}(x_i)}}{\sum_{i=0}^{n}(x - x_i)\pi'_{n+1}(x_i)}.$$

Réduction des endomorphismes

Exercice 12

Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe
$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A,$$
où tr désigne la trace d'une matrice (somme des coefficients diagonaux). Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de trace nulle.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0. Montrer que le sous-espace propres associé à la valeur propre 0 est de dimension 1.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = F$. Quelle est la dimension de F ?
4. Montrer que F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\mathrm{tr}(A)$.
5. En déduire que f est diagonalisable, et que c'est la composée de la projection sur F parallèlement à la droite engendrée par A avec l'homothétie de rapport $\mathrm{tr}(A)$.

Exercice 13

Soit E l'espace vectoriel des applications définies de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application :
$$f_n : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt[n]{x} \end{array}$$
.

1. Déterminer une relation entre f_n et f'_n.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la famille $S = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ est une famille libre de E.

Exercice 14

Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées et $\triangle : E \to E$ l'endomorphisme définie par $\triangle(u)(n) = u(n+1) - u(n)$. Déterminer les valeurs propres de $\triangle$.

Exercice 15

Diagonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

Exercice 17

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme non nul de E, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

1. Montrer que f n'est pas injectif.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 18

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres réelles de A.
2. a. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   b. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 19

Soit a un réel non nul et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une relation entre A et A^2.
2. En déduire les valeurs et les sous-espaces propres de A.
3. Vérifier que A est diagonalisable.

Exercice 20

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \longmapsto a + b\cos x + c\sin x + d\cos(2x) + e\sin(2x)$$

avec a, b, c, d, e des réels.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dimension.
2. On définit l'application φ qui à tout P de E associe l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_0^\pi \cos(x+t)P(t)dt.$$
   a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   b. Déterminer les images par φ des applications $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin(x)$. Quel est le rang de φ ?
   c. L'endomorphisme φ de E est-il diagonalisable ?

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors λ^3 est valeur propre de A^3.
2. a. Soit j le nombre complexe défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$
$$A^3 - \lambda^3 I = (A - \lambda I)(A - \lambda j I)(A - \lambda j^2 I).$$
   b. En déduire que, si μ est une valeur propre de A^3, il existe une valeur propre λ_0 de A telle que $\lambda_0^3 = \mu$.

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit L une matrice ligne non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et C une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note A la matrice $A = CL$.

1. a. Exprimer le réel LC en fonction des coefficients de L et de C.
   b. Déterminer le rang de la matrice A.
   c. Calculer le produit AC en fonction de LC et C.
2. Déterminer une relation entre A^2 et A. En déduire les valeurs propres de A.
3. a. Montrer que $A + I_n$ est inversible si, et seulement si, $LC + 1$ est non nul.
   b. Dans le cas où $LC + 1$ est non nul, déterminer l'inverse de $A + I_n$.

Exercice 23

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de rang 1 ($n \geq 1$).

1. Montrer que tout vecteur non nul de l'image de f est un vecteur propre de f.
2. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $f^2 \neq 0$.

Exercice 24

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère $A = (a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ et $B = (b_1, b_2, ..., b_{n-1})$ deux éléments non nuls de $\mathbb{C}^{n-1}$. On note $S = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de f.
2. a. Déterminer les valeurs propres de f.
   b. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, S est non nul.

Exercice 25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \phi(X) = AX - XB.$$

On désigne par α (resp. β) une valeur propre de la matrice A (resp. B).

1. Vérifier que ϕ est endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe des matrices colonnes non nulles C et D telles que $AC = \alpha C$ et ${}^tBD = \beta D$.
3. Calculer $\phi(C\,{}^tD)$ en fonction de C, D et β.
4. En déduire que $\alpha - \beta$ est valeur propre de l'endomorphisme ϕ.

• • • • • • • • • • •