Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto P(1)Q'(0) + P'(0)Q(1)$ définit une forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}[X]$. Est-ce un produit scalaire ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c et d pour que l'application :
 $(x, y) \mapsto ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$
définisse un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^2$.
3. Soient n entier naturel non nul, $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts et $w \in \mathbb{R}^{n+1}$. A quelle condition sur w l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) Q(x_i)$$

définit-elle un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. a. On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs. Montrer que
$$n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?
- b. En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.
2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  - a. Montrer que
$$\left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t) dt.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?
  - b. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a, b]$. Montrer que
$$\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right) \left(\int_a^b f(t) dt \right) \geq (b-a)^2.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 3

Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Donner une base orthonormée.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur $[-1, 1]$. Pour f et g de E , on pose $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.

3. Soit $\phi : f \rightarrow \widehat{f}$ avec $\widehat{f} : x \rightarrow f(-x)$. Montrer que ϕ est la symétrie orthogonal par rapport à $\mathcal{P}$

Exercice 5

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application qui, à tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe le scalaire $\text{Tr}({}^t AB)$ est un produit scalaire.
2. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques et le sous-espaces des matrices antisymétriques sont orthogonaux et supplémentaires vis-à-vis de ce produit scalaire.

Exercice 6

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 1, -2, 1)$.

1. Déterminer la dimension de H et une base de son orthogonal $H^\perp$.
2. On note p la projection orthogonale sur H . Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7

Soient E un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs unitaires telle que

$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2 = \|x\|^2.$$

1. Montrer que les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est égal à E .
3. En déduire que la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n -ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce, c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice 9

On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note F l'espace des fonctions affines de E et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de E définie par $f(t) = t^2$.

- Déterminer la projection orthogonale de f sur F . On la note $p_F(f)$.
- Calculer $\|f - p_F(f)\|^2$.
- En déduire le minimum pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 10

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $E = \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de terme dominant égal à X^n .

On définit la fonction G_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-\frac{t}{2}})$$

où $t \mapsto \frac{d^n}{dt^n} (e^{-\frac{t}{2}})$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$.

- Montrer que l'application

$$(\cdot, \cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(P, Q) \longmapsto (P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t}{2}} dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.

- Montrer que G_n est un élément de $\mathcal{U}$. On notera par la suite $F = X^n - G_n(X)$.
- Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $(G_n|X^j)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.
- Montrer que le polynôme F est le projeté orthogonal du polynôme X^n sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
- En déduire, en fonction de n la valeur de $\inf_{P \in \mathcal{U}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-\frac{t}{2}} dt$.

Exercice 11

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)$ dans E^n , on pose $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$ (déterminant de GRAM).

- Montrer que $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
- Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.
- On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre dans E . On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x, F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$).

$$\text{Montrer que } d(x, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}.$$

Exercice 12

Dans cette question, nous démontrons le théorème de projection sur un convexe fermée et non vide. Soient C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$d_C = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$.

- Montrer l'égalité du parallélogramme : pour tous u et v dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

- Montrer que pour tous y et y' dans C , on a

$$\left\| \frac{y-y'}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} (\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2) - d_C(x)^2.$$

- Montrer qu'il existe au plus un point qui réalise la distance $d_C(x)$.

- Soit une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = d_C(x)$.

Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Conclure sur l'existence et l'unicité de la projection de x sur C .

Exercice 13

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$, muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On considère F le sous-ensemble de E définie par $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$.

- Montrer rapidement que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E et que F est un sous-espace vectoriel de E .
- Soit g un élément de $F^\perp$. On pose $\forall t \in [0, 1]$,

$$g_1(t) = \begin{cases} 2tg(t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Montrer que g_1 est dans F et en déduire que g est nulle. En déduire que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

- Que dire de $(F^\perp)^\perp$?

.....