Exercice 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs
$$x_1 = (1,1,0,1),\quad x_2 = (1,1,1,0),\quad x_3 = (1,1,-2,1).$$

1. Déterminer la dimension de H et une base de son orthogonal $H^\perp$.
2. On note p la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$. Etant donné a, b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E, on considère l'application

$$f: \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (x|a)a + (x|b)b \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
3. Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de $\ker f$.
   a. Montrer que $\mathscr{B} = (a, b, e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de E.
   b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit une projection vectorielle.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Montrer que
$$\sup_{x\in E/\|x\|=1} (f(x)|x)$$
est égal à la plus grande valeur propre de f.

Exercice 5

Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique réelle d'ordre n. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $A^p = I_n$.
Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 6

Soit A une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$A^3 - 3A + 2I_n = 0,$$
Où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout élément $p \in \mathbb{N}$, on définit la matrice G_p de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par
$$G_p = \sum_{k=0}^{p} A^k.$$

1. a. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^3 - 3X + 2$.
   b. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de A ?
2. Prouver que pour tout entier p, G_p est inversible.

Exercice 7

Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme symétrique de E, c'est-à-dire que u vérifie
$$\forall x, y \in E,\quad (u(x)|y) = (x|u(y)).$$
On note S la sphère unité de E et $\varphi : S \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(x) = (u(x)|x)$.

1. Justifier que φ atteint son maximum sur S. On désignera par x_0 un point où ce maximum est atteint.
2. Soit y un vecteur unitaire orthogonal à x_0. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose
   $x(t) = (\cos t)x_0 + (\sin t)y$ et $f(t) = (u(x(t))|x(t))$.
   Démontrer que f admet un maximum en 0.
3. En déduire que y est orthogonal à $u(x_0)$.
4. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.

Exercice 8

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Montrer que l'application
$$\varphi : (x, y) \longmapsto (u(x)|y)$$
est un produit scalaire sur E si, et seulement si, $\mathrm{sp}(u) \subset]0, +\infty[$

Exercice 9

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres distinctes ou non. Montrer que :
$$\sup_{X\neq 0} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \max_i \lambda_i \quad \text{et} \quad \inf_{X\neq 0} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \min_i \lambda_i$$

Exercice 10

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique d'ordre n dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (avec leur ordre de multiplicité).
Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

Exercice 11

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on note (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. On note $w = 2e_1 + 3e_2 + e_3$ et π le plan vectoriel d'équation $2x + 3y + z = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan π et S la matrice de s dans la base (e_1, e_2, e_3).

1. Donner une base (u, v) du plan π et justifier, sans calcul, que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice S' de la symétrie s dans la base (u, v, w).

3. En déduire la matrice S.

Exercice 12

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les trois propositions suivantes sont Áéquivalentes :
   a. A appartient au groupe orthogonal $\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$,
   b. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $ab + bc + ca = 0$,
   c. $|a + b + c| = 1$ et $ab + bc + ca = 0$.
2. Calculer $\det A$. En déduire que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   a. A appartient au groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbb{R})$,
   b. $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ca = 0$.
3. Montrer que le polyn.ome $X^3 - X^2 + k$, avec k réelÁ, admet trois zéros reels si et seulement si $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$.
   En déduire que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   a. $A \in SO_3(\mathbb{R})$,
   b. il existe $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c soient les zéros du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (de dimension finie), si $u \in E \backslash \{0\}$ on note par s_u la symétrie orthogonale parallèlement à $\mathbb{R}u$.

1. Montrer que
$$\forall x \in E, \; s_u(x) = x - 2\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$
2. Soit $u, v \in E \backslash \{0\}$ et $\rho_{u,v}$ l'endomorphisme de E défini par
$$\rho_{u,v}(x) = x - (v|x)u, \forall x \in E.$$
   a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\rho_{u,v}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit diagonalisable.
   b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit inversible et déterminer son inverse dans ce cas.
3. a. Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\rho_{u,v}$.
   b. Montrer que pour tout vecteur non nul u, il existe un unique vecteur non nul, noté $\hat{u}$, tel que $\rho_{u,\hat{u}}$ appartienne à $\mathscr{O}(E)$ (le groupe orthogonal de E).
   Expliciter $\hat{u}$ en fonction de u.
   c. Montrer que $\rho_{u,\hat{u}} = s_u$.

Exercice 14

L'espace $E = \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique $(\forall (A, B) \in E^2, \; (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB))$. On pose
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}(I_4, U, U^2, U^3).$$

1. $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ sont deux éléments de E. Rappeler la valeur de $(A|B)$.
2. Montrer que (I_4, U, U^2, U^3) est une base orthogonale de F.
3. Soit V l'élément de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0.
   Trouver la meilleure approximation W de V par un élément de F et calculer la distance de V à F.

•••••••••••