Exercice 1

Étudier la convergence des séries numériques de terme général u_n, dans les cas suivantes :

$u_n = \dfrac{1}{n2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
$u_n = \dfrac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \dfrac{1}{1+2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$; $u_n = \sin\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$; $u_n = e^{-\sqrt{1+n}}$; $u_n = e^{\frac{a}{n}} - \sqrt{1-\dfrac{b}{n}}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \ln(1+u_n)$ et $t_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Exercice 3

1. Montrer que $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ est équivalent à $\dfrac{a}{\sqrt{n}}$ où a est un réel à préciser.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n^\alpha} t dt$ où α est un nombre réel.
3. Même question avec $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n} t dt$.

Exercice 4

Soit la série de terme général $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est une série alternée.
2. En utilisant les développements limités montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Exercice 5

Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs ou nuls. Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\sqrt{u_n}$ $(n \geq 1)$.

Exercice 6

Soit f une fonction positive décroissante pour $x \geq 1$. On pose

$$\varphi(n) = \sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1. Montrer que la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente (on comparera $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$).
2. APPLICATION :
   a. Soit la série $g(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ avec $\alpha > 0$. Montrer que $g(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$ au voisinage de $^+$.
   b. Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.
   c. Montrer que la suite $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ ($n \geq 1$) est convergente.

Exercice 7 — RÈGLE DE RAABE-DUHAMEL

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs satisfaisant à l'égalité :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que $\beta > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est convergente et que si $\beta < 1$ la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.
2. Que peut-on dire dans le cas $\beta = 1$?
3. Application : $u_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}$, $u_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)(2n+2)}$.

Exercice 8

1. Soit f une fonction continue décroissante sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Étudier la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt,\ n\in\mathbb{N}$.
2. Étudier le cas particulier : $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 9

1. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$ converge, et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 10

1. Calculer les sommes
$$U = \sum_{k=1}^{p}\cot\text{an}^2\frac{k\pi}{2p+1},\quad S = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2p+1}}$$
2. En utilisant $\cot\text{an}\, t < \frac{1}{t} < \frac{1}{\sin t}$, $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, en déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.
3. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}dt$ existe et qu'elle est égale à la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 11 — THÉORÈME D'ABEL

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels telles que :

1. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.
2. la suite de terme général $B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ est borné.

Montrer que la série de terme général a_nb_n est convergente.
Application : retrouver le critère de convergence spécial aux séries alternées.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et T un endomorphisme de E. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. On rappelle que $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$.

1. Monter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l = \inf\limits_{n\geq1} u_n$. l est appelé rayon spectral de l'endomorphisme T.
2. Si $l < 1$, montrer que $Id_E - T$ est inversible.
3. Soit $A = \begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{-5}{6}\\ \frac{5}{3} & \frac{-7}{6}\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Monter que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 13

Considérons les deux séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq1} b_n$ avec $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série produit de Cauchy des séries numérique $\displaystyle\sum_{n\geq1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq1} b_n$ est divergente.
2. Conclure.

Exercice 14 — THÉORÈME DE MERTENS

Soient $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série absolument convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ une série convergente. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_kv_{n-k},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V = \sum_{k=0}^{n} v_k,\ W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p < q$, on note $V_{p,q} = \sum_{k=p+1}^{q} v_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$U_n V_n - W_n = \sum_{k=1}^{n} u_k V_{n-k,n}.$$
2. En déduire
$$\lim_{n\to\infty} (U_n V_n - W_n) = 0.$$
3. Conclure.

Exercice 15

Dans E_3 espace euclidien orienté de dimension 3, on donne un vecteur $\overrightarrow{r} \neq 0$ et on considère la suite $(\overrightarrow{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\overrightarrow{x_0} \in E_3$ et $\forall n \geq 1$, $\overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{x_{n-1}}$.

1. Quelle est la nature de la série $R(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overrightarrow{x_n}$.
2. Montrer que l'application $R : \overrightarrow{x_0} \longmapsto R(\overrightarrow{x_0})$ est une rotation à préciser.

Exercice 16

En utilisant le résultat de l'exercice 11, montrer les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ ($\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha > 0$) sont convergentes.

●●●●●●●●●●