Exercice 1

1. Soit I un ensemble.
   a. Montrer que s'il existe une application injective $f : I \longrightarrow \mathbb{N}$, alors I est au plus dénombrable.
   b. Si $f : E \longrightarrow F$ est une surjection et si E est dénombrable, montrer F est dénombrable.
2. En déduire que les ensembles $\mathbb{N}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 3

Montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable, en déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$. En déduire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 5

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1. $(x)_{x\in\mathbb{Q}}$.
2. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}^*}$.
3. $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $x \in \mathbb{C}$.
4. $\left(\dfrac{1}{a^p + b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, $a, b \in]1, +\infty[$.

Exercice 6

Considérons la famille $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad a_{ij} = \frac{1}{(i+j)^r},$$

où r est un nombre réel.
Montrer que cette famille est sommable si, et seulement si, $r > 2$ et calculer sa somme.

Exercice 7

Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Même question avec $u_n = \dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8

Considérons la famille $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{ij} = \frac{a^i b^j}{(i+j)!},$$

où a et b sont des nombres complexes.
Montrer que cette famille est sommable et calculer sa somme.

Exercice 9

On considère la fonction ζ de Riemann, définie, pour $x \in]1, +\infty[$, par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$. Démontrer les relations suivantes :

1. $$\sum_{p=2}^{\infty} (\zeta(p) - 1) = 1 \text{ et } \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p (\zeta(p) - 1) = \frac{1}{2}.$$
2. $$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\zeta(p) - 1}{p} = 1 - \gamma \quad \text{et} \quad \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \zeta(p) = \gamma.$$
   γ étant la constante d'Euler.

Exercice 10

Établir que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n,$$

en notant $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

•••••••••••