

Exercice 1

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R .

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} d(n)x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} s(n)x^n$ où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 3

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Tr}(A^n)z^n$ et calculer sa somme en fonction du polynôme caractéristique χ_A de A .

Exercice 4

1. Trouver l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions classiques.

Exercice 5

Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{2n+2}$ et calculer sa somme.

Exercice 6

EXTRAIT DE MINES-PONTS PSI 97

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telles que :

- $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

On définit alors la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ par $b_1 = a_1$ et $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ pour $n \geq 2$. On note R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ et R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$.

On note $A : x \mapsto A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ et $B : x \mapsto B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

1. Montrer que $R_1 \geq 1$
2. Montrer que A est définie et continue sur $[-1, 1]$
3. a. Montrer que $0 \leq b_n \leq 1$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1

b. Que peut-on en déduire pour R_2 ?

4. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $B(x) = A(x) + A(x)B(x)$.
5. Montrer que $R_2 = 1$.

Exercice 7

Donner une expression aussi simple que possible de la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Exercice 8

Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge, calculer sa somme.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$? Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exercice 10

Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n : t \rightarrow t^n \sin(nx)$ avec x un réel de $]0, \pi[$.

1. Étudier de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$.
2. Calculer la somme $S_n(t) = \sum_{p=1}^n t^{p-1} \sin(px)$, puis la limite notée $S(t)$, de $S_n(t)$ pour n infini.
3. Calculer les intégrales sur $[0, 1]$, de S_n et de S .
4. En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ converge de donner sa somme.

Exercice 11

Soit $f : x \rightarrow e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. On se propose de deux méthodes à étudier dans les questions 1 et 2.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement en série entière sur $\mathbb{R}$ en effectuant le produit de deux séries entières.
2. a. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) suivante :
(E) $y'(x) - 2xy(x) = 0$.
b. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Dédurre des méthodes 1 et 2, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$.

Exercice 12

EXTRAIT DE CONCOURS E3A MP-PC 99

Le but de l'exercice est de montrer l'égalité $e^{-\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$ pour tout $x \in]0, 2[$, où $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$. On pose $c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$.

- Calculer c_1 et c_2 .
- Montrer que f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E) \quad 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.
- Montrer qu'il existe des fractions rationnelles φ et ψ qu'on précisera telles pour tout entier naturel n : $c_{n+2} = \varphi(n)c_{n+1} + \psi(n)c_n$.
- Montrer que pour tout entier naturel n : $|c_n| \leq 1$. Que pouvez-vous en déduire sur le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$?
- Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$. Montrer que S est de classe C^2 sur $]0, 2[$ et que S est solution de (E) sur $]0, 2[$.
- Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$.

Exercice 13

EXTRAIT DE CONCOURS CCP MP07

On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. On notera φ sa somme.
- Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \varphi(xt) dt$.

Exercice 14

RÈGLE DE RAABE-DUHAMEL ET APPLICATIONS

Partie A : Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
- Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n , à déterminer.
- On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

- Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
- Déterminer un réel positif K , indépendant de n , tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
- Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

- On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).
- Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n \ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B : Applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

- Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.
- Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4 + 1)^n}$.
 - Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.
 - Établir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$. En déduire la nature de la série $\sum I_n$.
- Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose $a_0 = 1, \forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
 - Indiquer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.
 - Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
 - Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$.
 - Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.
 - On suppose que $-1 < \alpha < 0$.
 - Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.
 - Montrer que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme.

•••••