Exercice 1

Déterminer si les intégrales suivantes sont définies ou non :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}dt$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}dt$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}dt.$

Exercice 2

On donne la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}$

1. Démonter que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ existent.
2. Pour $x > 0$ on définit la fonction F par $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt.$

   Effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale $F(x)$.

   Calculer $F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. En déduire l'existence et le calcul de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt.$

Exercice 3

Calculer, pour $x \in]1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)dt.$

Exercice 4

On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x dt$ pour $x > -1$.

1. Montrer que f est bien définie pour tout $x > -1$.
2. Exprimer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 5

En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{itx}dt.$

Exercice 6

1. Étudier les variations de la fonction f définie par : $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}dt.$
2. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x-2)$.
3. Calculer $f(n)$, pour n naturel.
4. Montrer que la fonction g déterminée par
$$g(x) = xf(x)f(x-1)$$
admet la période 1, en déduire qu'il s'agit d'une constante.
5. Montrer que $f(x) \simeq \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$. au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}dt.$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi}{2}$, donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$.

Exercice 8

À tout couple (a,b) de réels positifs ou nuls $(0 < a < b)$, on associe les suites numériques $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n+b_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent et ont la même limite. Cette limite qui est en fonction de (a,b), et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $l(a,b)$
2. Former une relation simple entre les intégrales
$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$
$$J(a,b) = \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$
Poser $u = \dfrac{ab}{t}$.
3. Faire dans $J(a,b)$ le changement de variable $u = \dfrac{ab-t^2}{2t}$ et en déduire
$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = ... = I(a_n,b_n)$$
4. Exprimer $l(a,b)$ en fonction de $I(a,b)$.

Exercice 9

1. Pour x réel positif et n entier naturel, on pose :
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$$
et
$$S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - ...(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$
Montrer que $F(x)$ existe et est compris entre $S_n(x)$ et $S_{n-1}(x)$.

2. Utiliser ce résultat pour calculer une valeur approchée de $F(5)$, avec une erreur absolue aussi petite que possible.

Exercice 10

(Extrait de ECRIN MP97) Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et telle que $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$. On pose :

$$T[f] : x \longmapsto T[f](x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2+x}dt.$$

1. Montrer que $T[f]$ est définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{n+1}}dt$
   a. Justifier l'existence de I_n pour tout entier naturel n.
   b. Montrer que $\forall x \in]-1,1[,\ T[f](x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n x^n$.
3. En déduire que $T[f]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et exprimer les dérivées successives de $T[f]$ en 0 à l'aide d'intégrales.

Exercice 11

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt.$$

1. Quel est l'ensemble D de définition de F?
2. En écrivant $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$, montrer que F est continue sur D.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\overset{\circ}{D}$ (l'intérieur de D).
4. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12

(Extrait de concours Communs Polytechniques PSI98) Soit α un réel non nul.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. En écrivant $\forall x > 0,\ \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x-1} = e^{-x}\sin(\alpha x)\dfrac{1}{1-e^{-x}}$, montrer que
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\sin\alpha x dx\right)$$
.
3. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n^2+\alpha^2}$.

Exercice 13

Soit $x > 0$. On considère l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha,+\infty[$, pour tout $\alpha > 0$. (On pourra utiliser le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss))
2. Calculer $F(x)$. (On justifiera toutes les étapes)

Exercice 14

Soit $\alpha > 0$. Démontrer en dérivant par rapport au paramètre, et en utilisant l'intégrale de Gauss que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{-\alpha^2}{4}}.$$

Exercice 15

Soit $\alpha > 0$. Démontrer en dérivant par rapport au paramètre, et en utilisant l'intégrale de Gauss que

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}dx = \sqrt{\pi\alpha}.$$

Exercice 16

(La fonction Gamma) On pose pour tout x réel :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ existe si, et seulement si, $x > 0$. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\Gamma(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers 0.
4. En utilisant le changement de variable $t = u^x$, montrer que, pour $x > 0$,
$$\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^x}dt.$$
5. Montrer que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 17

Pour $a \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}dx$$

1. Calculer $I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi)$; en déduire $I_n(\pi)$ pour tout n.
2. Pour $a \in]0,\pi[$, comparer $I_n(a)$ et $I_n(\pi-a)$; montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}[I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0$, puis que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n(a) = \frac{\pi}{2}.$$
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^a\frac{\sin nx}{x}dx$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

••••••••••