

Exercice 1

Soit

$$\phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

le changement de coordonnées polaires.

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$ -dérivable en $z = x + iy = re^{i\theta}$ et soit $\hat{f} = f \circ \phi$.

Montrer que $\hat{f}$ est différentiable en (r, θ) et ses composantes $\hat{u} = u \circ \phi$ et $\hat{v} = v \circ \phi$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \frac{\partial \hat{v}}{\partial r}(r, \theta) \end{cases}$$

2. On note Ω le plan complexe privé de la demi-droite $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \leq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0\}$. Pour $z \in \Omega$, on choisit l'argument θ de z dans $] -\pi, \pi[$ et on définit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(z) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ où $\rho = |z|$.
 - a. Montrer que f est holomorphe sur Ω . Calculer $f(z)^2$.
 - b. Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}^*$ telles que $u = \operatorname{Re}(f)$ ne dépend pas de θ .

Exercice 2

1. La fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ est-elle holomorphe? Quelle est sa différentielle?
2. Montrer que la fonction $f : z \mapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, de même pour les fonctions $f : z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ et $f : z \mapsto \operatorname{Im}(z)$.
3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x + iy) = x + 2ixy$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?
4. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x + iy) = \frac{xy(x + iy)}{x^2 + y^2}$ si $x + iy \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f n'est pas différentiable en 0, mais possède des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann en 0.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{2z}{1 - z - 2z^2}$ est holomorphe au voisinage de 0.

2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement en série entière en 0.

- a. Montrer que les coefficients a_n vérifient $a_0 = 0, a_1 = 2$ et $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- b. Établir que $0 < a_n \leq 3^{n-1}$ pour $n \geq 2$.
- c. Calculer explicitement les coefficients a_n . Quel est le rayon de convergence R de cette série?

Exercice 5

Trouver une fonction holomorphe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re}(f(z)) = \cos x \cosh y$.

Exercice 6

(holomorphie de la fonctions zéta et Gamma)
Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur leurs domaines de définition :

1. Fonction ζ de Riemann $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.
2. Fonction Gamma $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Exercice 7

(Transformée de Laplace)

Soit une fonction continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, |f(t)| \leq C e^{at}.$$

On pose $\mathcal{L}f(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt$.

1. Montrer que $\mathcal{L}f$ est bien définie sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > a\}$.
2. Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur Ω et que pour tout $z \in \Omega$, $(\mathcal{L}f)'(z) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-zt} dt$.

Exercice 8

(la fonction sinus)

On rappelle $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Cette fonction est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$, et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction sinus classique.

1. Calculer $|\sin(iy)|$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right)$ pour y réel. La fonction sinus est-elle bornée sur $\mathbb{C}^*$?
2. Prouver que $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$. En déduire $|\sin(x + iy)| \leq |\sin x| \cosh y$.
3. On considère le rectangle $\Gamma = \{z = x + iy / 0 \leq x \leq \pi, -a \leq y \leq a\}$ pour $a > 0$. Calculer $\sup_{z \in \Gamma} |\sin z|$. En quels points de Γ cette borne supérieure est-elle atteinte? Montrer

que $\sin z$ n'atteint pas de maximum sur l'ouvert
 $\{z = x + iy / 0 < x < \pi, -a < y < a\}$.

Exercice 9

Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\text{sh}(z)$ et $\text{ch}(z)$ sont définies par les formules :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \text{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

1. Montrer que $\cos$ et ch sont des fonctions paires et $\sin$ et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières.
 Prouver $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, $\sin(iz) = i \text{sh}(z)$, $\cos(iz) = \text{ch}(z)$, $\text{sh}(iz) = i \sin(z)$, $\text{ch}(iz) = \cos(z)$.
2. Établir les formules : $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$, $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ en écrivant de deux manières différentes $e^{i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.
3. Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi + z) = -\cos(z)$, $\sin(\pi + z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin(z)$.
4. Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 10

Montrer $\sin(a+ib) = \sin(a)\text{ch}(b) + i \cos(a)\text{sh}(b)$.
 Puis en prenant dorénavant a et b réels, prouver :
 $a, b \in \mathbb{R} \implies |\sin(a+ib)|^2 = \sin^2(a) + \text{sh}^2(b)$
 Déterminer alors les nombres complexes $z = a+ib$ tels que $\sin(z) = 0$. Donner une autre preuve.

Exercice 11

Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$|\cos(a+ib)|^2 = \cos^2(a) - \text{sh}^2(b) = \text{ch}^2(b) - \sin^2(a)$.
 Déterminer les nombres complexes z avec $\cos(z) = 0$.

• • • • •