

Exercice 1

On lance quatre dés à quatre faces. On suppose que les résultats possibles sont équiprobables. On considère l'événement A défini par le nombre de faces distinctes obtenues. Donner la probabilité de l'événement A .

Exercice 2

On considère n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). L'urne U_k contient n boules dont k blanches et $(n - k)$ noires.

- On choisit au hasard une urne puis on tire successivement et avec remise deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
- Même question qu'au 1) en considérant cette fois-ci que le tirage des deux boules se fait sans remise.

Exercice 3

Ω est un univers sur lequel est définie une probabilité p . A et B sont des événements tels que :
 $p(A) = 0.8$, $p(B) = 0.3$, $p(A \cup B) = 0.86$

- Calculer $p(A/B)$.
- A et B sont-ils indépendants ?
- Soit C un événement tel que : $p(B \cap C/A) = 0.2$
Calculer $p(C \cup \bar{A} \cup \bar{B})$.

Exercice 4

Quelles sont les probabilités que, parmi les familles à n enfants, $n \geq 2$, une famille soit constituée d'enfants des deux sexes (événement A), puis de garçons et d'au plus une fille (événement B) ? Calculer $p(A \cap B)$, comparer cette quantité au produit $p(A)p(B)$.

Exercice 5

Un maître et son élève tirent à l'arc sur une cible. La probabilité pour que l'arc aille à l'élève est 0.8 ; dans ce cas, la probabilité que la flèche aille au but est 0.5. Par contre, si la flèche est tirée par le maître, la probabilité de succès est 0.7. Une flèche part au but ; quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par le maître ?

Exercice 6

Nous disposons d'une pièce faussée et deux dés équilibrés D_1 et D_2 .

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D_1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D_2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- ◇ nous commençons par jeter la pièce,
- ◇ si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D_1 , sinon nous choisissons le dé D_2 , choix définitif pour la suite de l'expérience,
- ◇ ensuite nous jetons plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les événements suivants :

- ◇ D_1 est l'événement : " nous jouons avec le dé D_1 ",
- ◇ D_2 est l'événement : " nous jouons avec le dé D_2 ",
- ◇ pour tout entier naturel n , R_n est l'événement " nous avons obtenu une face rouge au n -ième lancer du dé choisi ".

- Quelles sont les valeurs de $p(D_1)$? $p(D_2)$?
Montrer que $\{D_1, D_2\}$ constitue un système complet d'événements.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les valeurs de $p_{D_1}(R_n)$ et de $p_{D_2}(R_n)$?
- Calculer $p(R_1)$.
- Établir un lien entre les probabilités $p_{D_1}(R_1)$, $p_{D_1}(R_2)$ et $p_{D_1}(R_1 \cap R_2)$. En déduire $p(R_1 \cap R_2)$.
- Montre que pour tout entier naturel non nul n :
$$p(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $p_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$.
- Calculer $p_{R_1 \cap R_2}(D_1)$, puis de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$p_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D_1 ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ?

Exercice 7

Dans une urne, on met $(n + 5)$ boules blanches, $(n + 3)$ boules noires et 6 boules rouges.

Un joueur tire une boule ; tous les tirages sont équiprobables. S'il tire une boule blanche, il a gagné ; s'il tire une boule noire, il a perdu ; s'il tire une boule rouge, il la remet dans l'urne et effectue un nouveau tirage ; s'il tire une boule blanche, il a gagné, sinon il a perdu.

- Montrer que la probabilité p_n pour que ce joueur gagne est $\frac{1}{2} \frac{(n+5)(n+10)}{(n+7)^2}$.
- Montrer que $p_n > \frac{1}{2}$.

Exercice 8

Soient A et B deux événements d'un univers Ω ($B \neq \Omega$).

- Montrer que :

$$p(A/B) = \frac{p(A) - p(A/B) \cdot p(B)}{1 - p(B)}.$$

- Lors d'une récente saison de chasse, on a pu établir les statistiques suivantes :
 - 30% des renards sont enrégés ;
 - parmi les renards abattus, 40% étaient enrégés.
 - On désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de la chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enrégé.
 - Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieur ou égale à 0.1 ?

.....