Exercice 1

Dans une réunion, huit personnes jettent simultanément une pièce de monnaie. Si toutes les pièces sauf une représentant le même côté, le prporietaire de cette dernière va chercher à boire.
Quelle est la probabilité d'obtenir des rafraîchissements ?

Exercice 2

On suppose que la probabilité d'avoir un enfant aux yeux bleus dans une famille donnée est 0.25. Soit X la v.a.r représentant le nombre d'enfants aux yeux bleus qui peuvent etre naitre dans cette famille dans une suite de cinq naissances.
Déterminer la loi de X, l'espérance mathématique de X et la variance.

Exercice 3

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre 4 portes d'apparence identique, dont l'une est dite " bonne " et les trois autres " mauvaises ". Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge éléctrique désagréable et est ramené à son point de départ et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1. **Le rat n'a aucune mémoire** : il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre les 4 portes. Déterminer la probabilité pour que le rat sorte au bout de la troisième fois, au bout de la septième fois.
2. **Le rat a une mémoire parfaite** : à chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celle qu'il n'a pas encore essayées. Le nombre d'essais effectués par le rat est une v.a.r X.

Déterminer la loi de X, l'espeérance mathématique et l'écart-type.

Exercice 4

Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20% ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4% ont la maladie M_b.

1. On prend un individu au hasard et on désigne respectivcement par A et B les événements suivants :

   " l'individu est atteint de la maladie M_a "
   " l'individu est atteint de la maladie M_b ".

   a. Donner les valeurs de $p(A)$, $p(B/A)$ et $p(B/\bar{A})$.
   b. Calculer $p(B \cap A)$ et $p(B \cap \bar{A})$. En déduire $p(B)$.
   c. Calculer $p(A/B)$.
2. On prend 10 individus au hasard dans cette population et on désigne par X la v.a donnant le nombre de ceux ayant la maladie M_a et la maladie M_b.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ? (Donner, en fonction de k, la probabilité $p(X = k)$ où $0 \leq k \leq 10$).
   b. Déterminer la probabilité de l'événement " deux individus au plus sont atteints de le maladie M_a et de la maladie M_b".
   On donnera le résultat sous forme décimale approchée à 10^{-3} près.

Exercice 5

On donne un entier n suéprieur ou égal à 3. n personnes se répartissent au hasard dans les trois pièces P_1, P_2 et P_3 d'un appartement, chaque pièce pouvant contenir un nombre quelconque de personnes allant de 0 jusqu' à n. On désigne par X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires prenant pour valeurs respéctives le nombre de personnes situées dans les pièces P_1, P_2 et P_3.

1. a. Donner les lois de probabilité de X_1, X_2, X_3 et $X_1 + X_2$.
   b. Calculer la variance de $X_1 + X_2$; en déduire la covariance et le coefficient de coorélation linéaire du couple (X_1, X_2).
2. a. Donner la loi de probabilité conjointe du couple (X_i, X_j) $(i \neq j)$.
   b. On désigne par Y_n la v.a.r prenant pour valeurs le nombre de pièces occupées. Donner la loi de Y_n et son espérance mathématique.

Exercice 6

Des études statistiques montrent que 6% des individus d'une population souffrent d'une maladie donnée.

1. On considére un échantillon pris au hasard de 100 personnes de la population, cette dernière étant suffisament grande pour que l'on puisse assimiler le choix de l'echantillon à 100 choix indépendants malades de l'échantillon.
   a. Soit k un entier compris entre 0 et 100. Exprimer en fonction de k la probabilité de l'événment "$X = k$".
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'il n 'y ait aucun malade dans l'échantillon.
   c. Calculer l'éspérance mathématique $E(X)$ de X.
2. Un test est utilisé pour diagnostiquer la maladie considérée.
   On établi statistiquement que :
   • Sachant qu'un individu est malade, la probabilité qu'il ait un test positif est 0.95;
   • Sachant qu'un individu n'est pas malade, la probabilité qu'il ait un test négatif est 0.97.
   On désignera par M l'événement " être malade", par T l'événement " avoir un test positif ".
   a. Calculer les probabilités des événements : " M et T ", " $\bar{M}$ et $\bar{T}$ " et " $\bar{M}$ et T ". En déduire $p(T)$.
   b. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade ?
   On donnera le résultat sous forme décimale approchée à 10^{-2} près.

Exercice 7

Dans cet exercice, la probabilité de l'événement A sera notée $p(A)$.
Nous disposons de trois dés équilibrés, chacun ayant quatre faces numérotées de 1 à 4. L'un des dés est rouge, un autre est bleu et le dernier est vert.

1. Nous jetons les trois dés simultanément. X désigne la variable aléatoire qui donne le maximum des trois nombres amenés par les dés.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la fonction de répartition de X.
   c. En déduire la loi de X.

2. Nous jetons les trois dés simultanément et on note X_1, X_2, X_3 les nombres amenés respectivement par le dé rouge, le dé bleu et le dé vert.
   a. Soit Y la variable aléatoire donnant la somme des nombres amenés par les dés rouge et bleu.
      i. Déterminer explicitement les couples (a, b) d'entiers de $\{1, 2, 3, 4\}$ tels que : (a) $a + b = 33$, (b) $a + b = 6$, (c) $a + b = 8$.
      ii. Déterminer l'ensemble I des valeurs prises par Y.
      iii. Déterminer la loi de Y en complétant le tableau suivant :

i	2	3	4	5	6	7	8
p(Y=i)							

   b. Soit Z la variable aléatoire donnant la somme des nombres amenés par les trois dés.
      i. Déterminer l'ensemble J des valeurs prises par Z.
      ii. Justifier : $\forall j \in J, p(Z = j) = \sum_{i=2}^{8} p(Y = i, X_3 = j - i)$.
      iii. Démontrer que : $p(Z = 5) = \dfrac{3}{32}$.
      iv. Déterminer la probabilité pour que la somme des nombres amenés par les trois dés soit un multiple de 5.

3. Nous jetons les trois dés et nous calculons la somme des nombres amenés par les trois dés. Et tant que cette somme n'est pas un multiple de 5, nous recommencerons le lancer des trois dés.
N désigne le nombre de lancers réalisés pour obtenir cette somme multiple de 5. Reconnaître la loi de N et préciser l'espérance de N.

Exercice 8

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y . Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 9

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $\dfrac{2}{3}$, et donc celle d'obtenir face est $\dfrac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité $p(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2), (X = 3), (X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n = \dfrac{2}{9} p_{n-2} + \dfrac{1}{3} p_{n-1}, n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $q \in] - 1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=1}^{\infty} n q^n$, et calculer alors $E(X)$.

Exercice 10

Soient X et Y deux v.a.r prenant leurs valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau :

X \ Y	0	1	2
0	p	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{4}$
1	$2p$	p	$\frac{p}{2}$
2	$4p$	$2p$	p

1. Que doit vérifier p pour que ce tableau représente effectivement la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires réelles.
2. Déterminer les lois marginales de ce couple.
3. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :
• à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
• si, à l'instant $t = n$, $n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.
• si, à l'instant $t = n$, $n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n = 1$.
On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n.
2. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 12

On considère le jeu électronique suivant :
Un point lumineux L se déplace par sauts successifs sur un axe d'origine O, et peut à chaque instant se situer en l'un des cinq points P_j d'abscisses j égales à : $-2; -1; 0; 1; 2$.
Lorsque le point L est en P_j, $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant t, la probabilité pour qu'il se positionne en P_k, $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant $t + 1$ est fournie par le tableau ci-dessous :

instant t \ instant $t+1$	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2
P_{-2}	0	1	0	0	0
P_{-1}	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
P_0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
P_1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
P_2	0	0	0	0	1

Par exemple, si L est en P_0 à l'instant t, il se positionnera en P_{-1} avec la probabilité de $\frac{1}{2}$, ou en P_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le point lumineux L est en P_0.

1. Déterminer les probabilités de chacun des trois événements suivants :
   a. De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$ inclus, le point lumineux ne s'est positionne ni en P_{-2}, ni en P_2.
   b. De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$, $n > 0$, le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et il se positionnera en P_2 pour la première fois à l'instant $t = n$.
   c. Le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et se positionne en P_2 pour la première fois.
2. On désigne par X_n la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur l'abscisse du point lumineux à l'instant $t = n$
   a. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires réelles X_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Calculer l'espérance mathématique et la variance des la variable aléatoire réelle X_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4).
3. a. Déterminer la loi de probabilité de X_{n+1} en fonction de la loi de probabilité de X_n.
   b. On désigne par a_n la probabilité de l'événement "$X_n = 0$". Établir une relation de récurrence de la forme :
   $$\alpha a_{n+2} + \beta a_n + \gamma a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2.$$
   c. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence :
   $$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0, n \geq 1.$$
   d. En déduire a_n. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 13

Soient p_1, p_2 et p_3 des réels strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère $D_n = \{(i,j) \in \mathbf{N}^2 : i + j \leq n\}$ et la fonction de deux variable f définie sur D_n par
$$f(i,j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}.$$

1. Montrer que, pour tout couple (i,j) de D_n, on a :
$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} \text{ et}$$
$$\sum_{(i,j)\in D_n} f(i,j) = (p_1 + p_2 + p_3)^n.$$

Nous supposerons dans la suite du problème que : $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est définie pour tout $(i,j) \in D_n$ par :
$$p(X = i, Y = j) = f(i,j).$$

2. Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X et Y.
3. En déduire les espérances mathématiques $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$, ainsi que les variances $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$, des variables aléatoires X et Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.
5. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $S = X + Y$.
6. En déduire la covariance de X et Y, ainsi que leur coefficient de corrélation.
7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [1, n]$. On définit la variable aléatoire X_j par :
$$p(X_j = i) = p(X = i | Y = j).$$
Déterminer la loi de probabilité de Y_i. Reconnaître cette loi et en donner les paramètres. Déterminer en fonction de n, j, p_1 et p_2, l'espérance $\mathbf{E}(X_j)$ et la variance $\mathbf{V}(X_j)$ de la variable aléatoire X_j.
8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [1, n]$. On définit la variable aléatoire Y_i par :
$$p(Y_i = j) = p(Y = j | X = i).$$
Déterminer la loi de probabilité de Y_i. Reconnaître cette loi et en donner les paramètres. Déterminer en fonction de n, i, p_1 et p_2, l'espérance $\mathbf{E}(Y_i)$ et la variance $\mathbf{V}(Y_i)$ de la variable aléatoire Y_i.

Exercice 14

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} kp(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(X > k) - np(X > n).$$
   b. On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.
   c. Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que la suite $(np(X > n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X > k)$ converge, et enfin que
   $$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty}(X > k).$$
2. APPLICATION : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
   a. Que vaut $(X \leq k)$? En déduire la loi de X.
   b. A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
   c. A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
   d. En déduire que $\lim_{N\to\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

••••••••••