Exercice 1

Soit X la variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, muni de la fonction densité f définie par : $f(x) = 3x^2$.

1. Déterminer $p(X = 0,5)$
2. Calculer $p(X \leq 0,5)$.
3. En déduire $p(X > 0,5)$.
4. Calculer $p(0,3 < X \leq 0,5)$.
5. Calculer $p_{(0,2 \leq X < 0,5)}(0,3 \leq X < 0,9)$.

Exercice 2

Karim vient tous les matins entre 7h et 7h45 chez Rachid prendre un café.

1. Sachant que Karim ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, quelle densité peut-on attribuer à la variable aléatoire " heure d'arrivée de Karim " ?
2. Calculer la probabilité que Karim sonne chez Rachid :
   a. Après 7h30
   b. Avant 7h10
   c. Entre 7h20 et 7h22
   d. A 7h30 exactement.
3. Calculer l'heure moyenne d'arrivée de Karim ?

Exercice 3

1. Vérifier que $f : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ sont des densités de probabilité.
2. Déterminer la fonction $h = f * g$.
3. Vérifier que $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est une densité de probabilité.
4. Déterminer $h = f * f$.

Exercice 4

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes. On suppose que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement F_X et F_Y.
2. Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. En déduire $(X+Y)(\Omega)$.
3. Déterminer une densité f de X puis une densité g de Y. Les représenter graphiquement.
4. Déterminer une densité h de $X+Y$. La représenter graphiquement.
5. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 5

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.
2. Soit φ la fonction de R dans R définie par :
$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$
Étudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, et déterminer sa bijection réciproque.
3. On définit une variable aléatoire Y par :
$$Y = \varphi(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}.$$
Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $N(0,\sigma_1^2)$et $N(0,\sigma_2^2)$. Montrer que $X+Y$ suit une loi normale $N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 8

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.

1. Pour tout réel y, calculer $p(Y > y)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et lŠautre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier ?
3. En moyenne, après combien de temps sort le dernier ?

Exercice 9

Soit X une variable uniforme sur $\{-1,0,1\}$, c'est-à-dire :
$X(\Omega) = \{-1,0,1\}$ *et* $p(X=-1) = p(X=0) = p(X=1) = \dfrac{1}{3}$.
Calculer $\varrho(X^n, X^m)$ avec $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 10

Une famille de densité de probabilité utilisée pour représenter la distribution des revenus, la taille des villes, la taille des entreprises, etc s'appelle la *loi de Pareto*. Elle est définie par la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ \dfrac{k\theta^k}{x^{k+1}} & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

où k et θ sont des constantes strictement positives.

1. Déterminer une expression explicite (sans signe d'intégration) pour la fonction de répartition F.
2. Calculer $p(2 < X < 3)$ si $k = 2$ et $\theta = 1$.
3. Si $k > 1$, déterminer une expression pour la moyenne et calculer si $\theta = 1$ et $k = 2$.
4. Si $k > 1$, déterminer une expression pour l'écart-type.

• • • • • • • • • • •