Corrigé

CNC MP 2003, Math 1

Partie I

1. a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,\alpha]$ prolongeable par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0,\alpha]$

   b) La fonction $t \longrightarrow \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et $t^2\left(\dfrac{e^{-t}}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   donc elle est intégrable sur $[x,+\infty[$.

2. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

   a) Faites bien attention ici, les inégalités demandées sont strictes.

   Soit $x>0$. $\varphi(x)>0$ car la fonction $t \longrightarrow \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue positive non nulle sur $[x,+\infty[$.

   Ensuite $\forall t \in]x,+\infty[$, $\dfrac{e^{-t}}{t} < \dfrac{e^{-t}}{x}$ donc : $\varphi(x) < \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ avec $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}$ donc $\varphi(x) < \dfrac{e^{-x}}{x}$.

   b) On peut écrire $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$.

   La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ d'après le théorème fondamental du calcul intégral.

   Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,
   $$\varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

   c) pour un $x>0$,
   $$\begin{aligned}\varphi(x)+\ln(x) &= \varphi(1)+\int_1^x \varphi'(t)dt + \ln x = \varphi(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^x \frac{dt}{t}\\ &= \varphi(1) + \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt\end{aligned}$$

   La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est int sur $]0,1]$, donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt = -\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt$.

   Alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(\varphi(x)+\ln(x)) = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt$.

   d) La fonction $\rho : x \longmapsto \varphi(x)+\ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc d'après le thm fondamental du calcul intégral on a pour tout $x>0$

   $\rho(x) = \rho(1) + \displaystyle\int_1^x \rho'(t)dt$. Ce qui donne

   $\varphi(x) + \ln x = \varphi(1) + \displaystyle\int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt = C + \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt + \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt = C + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$.

   Ensuite, en utilisant le DSE de la fonction exponentielle on a pou $t \neq 0$
   $$\frac{1-e^{-t}}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}t^{n-1}.$$

   (*ce qui au passage permet de justifier que la fonction* $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ *est prolongeable en une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$).

   Et par primitivisation de la somme d'une série entière :
   $$\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}x^n.$$

   Ainsi pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\ln x = C + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}x^n$.

3. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \psi(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(|x|)$.

   a) ψ est une fonction paire, il suffit de justifier son intégrabilité sur $]0,+\infty[$.

   Sur $]0,+\infty[$, ψ est continue par continuité de φ et d'après la question (2.a), $\psi(x) < \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-x}}{x}$ ce qui justifie l'intégrabilité de ψ sur $[1,+\infty[$. D'après la question (2.c) $\psi(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\ln x$ donc $\sqrt{x}\psi(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que ψ est intégrable sur $]0,1]$

   Alors ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   b) *Signalons un détail qui pose problème : l'écriture* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)e^{-ixt}dt$ *"serait" incorrecte puisque la fonction* $t \longmapsto \psi(t)e^{-ixt}$ *n'est pas CPM sur* $\mathbb{R}$ ($\lim\limits_{0}\psi(t)e^{ixt} = +\infty$), *Une convention dans de pareil cas est de poser* $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0}\psi(t)e^{-ixt}dt + \int_0^{+\infty}\psi(t)e^{-ixt}dt$.

   φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc ψ est intégrable sur les intervalles $]-\infty,0[$ et

$]0,+\infty[$. et on a pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(x) &= \int_{-\infty}^{0} \psi(t)e^{-ixt}dt + \int_{0}^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} \psi(-t)e^{ixt}dt + \int_{0}^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} \psi(t)(e^{-ixt}+e^{ixt})dt \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \psi(t)\cos(xt)dt = \int_{0}^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt
\end{aligned}$$

c) • La fonction $\Psi : (x,t) \longmapsto \varphi(t)\cos(xt)$ est continue sur $D = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et admet pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial^k \Psi}{\partial x^k} : (x,t) \longmapsto t^k\varphi(t)\cos\left(xt + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ continue sur D. De plus pout tout $(x,t) \in D$:

- $|\Psi(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- $\left|\dfrac{\partial^k \Psi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant t^k\varphi(t)$.

  La fonction $t \longmapsto t^k\varphi(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 car $t^k\varphi(t) \underset{0}{\sim} -t^k \ln t$ et donc $t^k\varphi(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Sur $[1,+\infty[$ on a la majoration $t^k\varphi(t) \leqslant t^{k-1}e^{-t}$ et donc $t^2(t^k\varphi(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui achève la justification de l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto t^k\varphi(t)$ sur $]0,+\infty[$.

Alors $\widehat{\psi}$ est bien définie de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\psi}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^k\varphi(t)\cos\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)dt$$

d) La fonction $t \longmapsto \varphi(t)\cos(xt)$ étant intégrable sur $]0,+\infty[$, une intégration par partie (en utilisant la suite exhaustive $([\frac{1}{n},n])_{n>0}$) donne :

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{n} \varphi(t)\cos(xt)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left[\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{1/n}^{n} - \frac{1}{x}\int_{1/n}^{n}\varphi'(t)\sin(xt)dt\right) \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{n}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt
\end{aligned}$$

Car d'un coté la fonction $t \longmapsto \varphi(t)\dfrac{\sin(xt)}{x}$ tend vers 0 en 0 et en $+\infty$ et de l'autre la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.(les deux points à la charge du lecteur).

Ensuite $\widehat{\psi}(0) = \int_0^{+\infty}\varphi(t)dt = \lim\left([t\varphi(t)]_{1/n}^{n} - \int_{1/n}^{n} t\varphi'(t)dt\right) = \lim \int_{1/n}^{n} e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$, soit $\widehat{\psi}(0) = 1$.

puisque $t\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 et vers $+\infty$

4. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt = x\widehat{\psi}(x)$

a) **Première façon :** On utilise la fonction $\widehat{\psi}$

L'expression $\Phi(x) = x\widehat{\psi}(x)$ explique que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$\Phi'(x) = \widehat{\psi}(x) + x\widehat{\psi}'(x) = \widehat{\psi}(x) - x\int_0^{+\infty} t\varphi(x)\sin(xt)dt$$

Une intégration par partie (à faire correctement) donne :

$x\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\sin(xt)dt = \int_0^{+\infty}(\varphi(t) + t\varphi'(t))\cos(xt)dt = \widehat{\psi}(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$

Et donc : $\Phi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$

Deuxième façon : On utilise la formule de Leibniz.

- La fonction $k : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$ et continue sur $\Delta =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et sa dérivée partielle $\dfrac{\partial k}{\partial x} : (x,t) \mapsto e^{-t}\cos(xt)$ est continue sur Δ.
- Via l'inégalité $|\sin(u)| \leqslant u$ si $u \geqslant 0$, on a pour tout $(x,t) \in \Delta$, $|k(x,t)| \leqslant xe^{-t}$.

  Soit donc $a > 0$.

$$\forall (x,t) \in]0,a]\times]0,+\infty[,\ |k(x,t)| \leqslant ae^{-t}$$
$$\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$$

  les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto ae^{-t}$ étant continues intégrables sur $]0,+\infty[$.

  Alors Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Phi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$.

Maintenant la fonction $t \longmapsto e^{-t}e^{ixt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $|e^{-t}e^{ixt}| = e^{-t}$. donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt &= \mathcal{R}e\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}dt\right) = \mathcal{R}e\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \mathcal{R}e\left(-\frac{1}{-1+ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Alors : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

b) Pour tout $x > 0$, $\Phi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et la relation $\Phi(x) = x\widehat{\psi}(x)$ implique qu'en fait Φ est continue en 0 puisque $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que $\Phi(0) = 0$. Alors $\Phi(x) = \arctan x$. Anisi

$$\forall x > 0,\ \widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

Ensuite l'écriture $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt$ valable pour tout x non nul implique que $\widehat{\psi}$ est paire sur $\mathbb{R}^*$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

Partie II

1. a) f une fonction CPM intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$$

montre que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$. Donc $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Si f est continue, la fonction $(x,t) \longmapsto f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$, $|f|$ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Alors $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) La linéarité de F découle de la linéarité de l'intégrale.

b) Les fonctions $\widehat{f_a}$ et $\widehat{{}_af}$ sont bien définie puisque les fonctions $t \longmapsto f(t-a)$ et $t \longmapsto f(at)$ sont CPM intégrables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\widehat{f_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-ixt}dt \overset{\text{translation}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ix(a+u)}du = e^{-iax}\widehat{f}(x).$$

et si $a \neq 0$ et $\epsilon = sign(a)$

$$\begin{aligned}\widehat{{}_af}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-ixt}dt \overset{u=at}{=} \frac{1}{a}\int_{-\epsilon\infty}^{+\epsilon\infty} f(u)e^{-ixu/a}du \\ &= \frac{\epsilon}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ixu/a}du = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

c) Considérons la fonction $g : t \longmapsto f(t)e^{iat}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i(a-x)t}dt = \widehat{f}(x-a).$$

d) Ayant $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ixt}dt = \int_0^{+\infty} f(-t)e^{ixt}dt$, $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(f(t)e^{-ixt} + f(-t)e^{ixt}\right)dt$.

et donc :

$$\widehat{f}(x) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)dt \quad \text{si } f \text{ est paire.}$$

$$\widehat{f}(x) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt \quad \text{si } f \text{ est impaire.}$$

e) Si f est une fonction réelle paire, $\widehat{f}$ est paire et à valeurs réelles. Si f est réelle impaire, $\widehat{f}$ est impaire et à valeurs imaginaires pures.

3. f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

a) f' est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, comme $\displaystyle\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ ceci revient à ce que f admette une limite finie en $+\infty$. Soit l cette limite.

Supposons que $l \neq 0$, alors il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \in [A,+\infty[,\ |f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|l|.$$

La fonction constante $x \longmapsto \dfrac{1}{2}|l|$ n'est pas intégrable sur $[A,+\infty[$ donc f ne serait pas intégrable sur $[A,+\infty[$. contradiction.

Alors $l = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On obtient $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ en appliquant ce dernier résultat à la fonction $x \longmapsto f(-x)$.

b) Une intégration par partie (à exécuter correctement avec des bornes finies) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}dt = \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-ixt} - \lim_{t\to-\infty} f(t)e^{-ixt} + ix\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt.$$

$\left|f(t)e^{-ixt}\right| = |f(t)|$ donc d'après la question précédente $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-ixt} = 0$. Alors

$$\widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x).$$

c) D'après (II-1.a), $\widehat{f'}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. La relation $\widehat{f}(x) = \dfrac{\widehat{f'}(x)}{ix}$ implique alors que $\lim\limits_{\pm\infty}\widehat{f} = 0$.

d) On suppose que la fonction $g : t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Utiliser le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (formule de Leibniz) pour justifier que dans ce cas $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\widehat{f}\,'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-ixt}dt = -i\widehat{g}(x)$$

N.B : Ici on a juste besoin que f soit continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Nul besoin que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ et encore moins que f' soit intégrable comme peut le suggérer l'enchaînement des questions de l'énoncé.

Par extension si f est continue sur $\mathbb{R}$ (CPM suffit) et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in\ \widehat{f}^{\,(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) e^{-ixt}\,dt$$

Partie III

A.

On considère la fonction $h : t \longmapsto e^{-t^2}$.

1. h est continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \longmapsto th(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{\pm\infty} t^3 h(t) = 0$. D'après la question (II-3.c) $\widehat{h}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\widehat{h}\,'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2} e^{-ixt}\,dt$$
Une intégration par partie donne alors
$$\widehat{h}'(x) = i\left(\left[\frac{e^{-t^2}}{2}e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ix}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-ixt}\,dt\right) = -\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}e^{-ixt}\,dt = -\frac{x}{2}\widehat{h}(x)$$
$\widehat{h}$ est donc une solution de l'équation différentielle
$$y' + \frac{x}{2}y = 0 \qquad (1)$$

2. Les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda e^{-x^2/4}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h}(x) = \lambda e^{-x^2/4}$.
Comme $\widehat{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ alors $\lambda = \sqrt{\pi}$. Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - ixt}\,dt = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$$

3. Soient $\varepsilon > 0$ et la fonction ${}_{\sqrt{\varepsilon}}h : t \longmapsto e^{-\varepsilon t^2}$. D'après (II-2.b),
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{{}_{\sqrt{\varepsilon}}h}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\widehat{h}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-x^2/4\varepsilon}$$

B.

f une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\widehat{f}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
$(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

1. a) v une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Si on pose $v_n(y) = v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}$, les fonctions v_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(v_n)_n$ CVS vers v sur $\mathbb{R}$ puisque $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0 et v est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus $\forall y \in \mathbb{R}$, $|v_n(y)| \leqslant |v(y)|$ et v est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de la convergence dominée s'applique ici, il donne :
$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\,dy.$$
b) Soit $x \in \mathbb{R}$, le même théorème se base ici sur la domination :
$$\left|w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}\right| \leqslant Me^{-y^2}$$
où $M = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}} |w(u)|$. Il donne :
$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)e^{-y^2}\,dy = w(x)\sqrt{\pi}.$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}\,dy = \widehat{{}_{\sqrt{\varepsilon_n}}h}(t-x) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}e^{-(t-x)^2/4\varepsilon_n}$ donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}\,dy\right)dt = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(t-x)^2/4\varepsilon_n}\,dt$$
En posant $s = \dfrac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}$, soit $t = x + 2s\sqrt{\varepsilon_n}$ on obtient :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}\,dy\right)dt &= \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}.2\sqrt{\varepsilon_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}\,ds \\ &= 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}\,ds\end{aligned}$$

3. x u réel donné.
a) Soient $\varepsilon > 0$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$.
Sachant que la fonction $(y,t) \longmapsto f(t)e^{ixy-\varepsilon y^2 - iyt}$ est continue sur $[-p,p] \times [-q,q]$, le théorème de Fubini donne :
$$\int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}\,dt\right)dy = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}\,dy\right)dt.$$
b) Posons pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $F_q(y) = e^{ixy-\varepsilon y^2}\displaystyle\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}\,dt$.
Du au fait que $\displaystyle\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}\,dt \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(y)$, la suite de fonction $(F_q)_q$ CVS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F : y \longmapsto e^{ixy-\varepsilon y^2}\widehat{f}(y)$, fonction qui est continue puisque $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|F_q(y)| \leqslant e^{-\varepsilon y^2}\displaystyle\int_{-q}^{q} |f(t)|\,dt \leqslant Ie^{-\varepsilon y^2}$ où $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$.

la fonction $y \longmapsto Ie^{-\varepsilon y^2}$ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théoreme de la convergence dominée donne alors $\lim\limits_{q\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_q(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)dy$, soit :

$$\lim_{q\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\right)dy$$

c) De façon similaire on démontre que :

$$\lim_{p\to\infty}\int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt$$

d) La fonction $A : y \longmapsto e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|A(y)| \leqslant Ie^{-\varepsilon y^2}$ où $I = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$. Donc $\lim\limits_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} A(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} A(y)dy$.

En faisant tendre p vers l'infini dans la relation du (III-B-3.a) et via le résultat démontré dans la question (III-B-3.c) on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}\right)dy = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt$$

Maintenant en considérant la fonction $B : t \longmapsto f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)$, et vu que f est intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{q\to\infty}\int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt$$

La relation précédente, via la question (III-B-3.b) donne alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\widehat{f}(y)dy\end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après (III-B-2) et (III-B-3.c), en remplaçant ε par ε_n on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\widehat{f}(y)dy = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}\,ds$$
D'après (III-B-1.b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}\ f(x)$

Et d'après (III-B-1.a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\widehat{f}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)dy$

Alors :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)dy = 2\pi\ f(x).$$

Résumons, Si f est continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on a la relation dite formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(t)e^{ixt}dt$$

Fin.