

Centre des classes préparatoires  
AGADIR

---

# Cours de Mathématiques

1. Espaces vectoriels
2. Applications linéaires
3. Matrices
4. Systèmes linéaires

Pour BCPST 1

---

**Année scolaire : 2004/2005**

16 juin 2005

Mohamed TARQI

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces vectoriels et applications linéaires</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions et propriétés . . . . .	3
1.1.1	Espace vectoriel des fonctions numériques . . . . .	3
1.1.2	Structure d'espace vectoriel . . . . .	4
1.1.3	Règles de calcul dans un espace vectoriel . . . . .	5
1.2	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel . . . . .	6
1.2.1	sous-espaces vectoriel . . . . .	6
1.2.2	Sous-espaces supplémentaires . . . . .	8
1.3	Indépendance linéaire. Dimension . . . . .	9
1.3.1	Indépendance linéaire . . . . .	9
1.3.2	Bases et dimension . . . . .	9
1.3.3	Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	10
1.4	Applications linéaires . . . . .	11
1.4.1	Définition. Exemples . . . . .	11
1.4.2	Premières propriétés des applications linéaires . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Matrices</b>	<b>15</b>
2.1	Généralités . . . . .	15
2.1.1	Définitions diverses . . . . .	15
2.1.2	Matrice et application linéaire . . . . .	17
2.2	Opérations algébriques sur les matrices . . . . .	18
2.2.1	L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ . . . . .	18
2.2.2	Produit de deux matrices . . . . .	18
2.2.3	Matrices carrées inversibles ( ou régulières ) . . . . .	20
2.3	Changement de bases . . . . .	20
2.3.1	Matrice de passage d'une base à une autre . . . . .	20
2.3.2	Action de changements de bases dans $E$ et dans $F$ sur la matrice d'une application linéaire de $E$ dans $F$ . . . . .	21
2.3.3	Rang d'une matrice . . . . .	22
2.4	Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice . . . . .	23
2.4.1	Définitions et propriétés . . . . .	23
2.4.2	Exemples . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Systèmes linéaires</b>	<b>26</b>
3.1	Généralités et définitions . . . . .	26
3.2	Intérprétation d'un système . . . . .	27
3.2.1	Interprétation vectorielle . . . . .	27
3.2.2	Interprétation à l'aide d'une application linéaire . . . . .	27
3.3	Transformations élémentaires d'un système . . . . .	28
3.4	Résolution d'un système linéaire . . . . .	28
3.4.1	Méthode de pivot de Gauss . . . . .	28
3.4.2	Résolution du système ( $S'$ ) . . . . .	29

# Chapitre 1

## Espaces vectoriels et applications linéaires

### Contents

---

1.1	Définitions et propriétés . . . . .	3
1.2	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel . . . . .	6
1.3	Indépendance linéaire. Dimension . . . . .	9
1.4	Applications linéaires . . . . .	11

---

### 1.1 Définitions et propriétés

#### 1.1.1 Espace vectoriel des fonctions numériques

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Notons  $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  l'ensemble des applications de  $A$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $f$  et  $g$  des éléments de  $E$ . Rappelons que la somme  $f + g$  est par définition l'application qui à tout élément  $x$  de  $A$  associe le nombre réel  $f(x) + g(x)$ . Nous savons que, muni de l'addition,  $E$  vérifie :

- $\forall f, g, h \in E$  on a :  $(f + g) + h = f + (g + h)$
- $\forall f, g \in E$  on a :  $f + g = g + f$
- $\forall f \in E$  on a :  $f + 0_E = 0_E + f$  ( $0_E$  la fonction nulle)
- $\forall f \in E$  on a :  $f + (-f) = (-f) + f = 0_E$

D'autre part, on peut définir une application de  $\mathbb{R} \times E$  dans  $E$  de la manière suivante : pour tout nombre réel  $\alpha$  et pour tout élément de  $E$ , on note  $\alpha f$  l'application qui à tout élément  $x$  de  $A$  associe le nombre réel  $\alpha f(x)$ . Il ne s'agit plus de loi de composition interne (c'est à dire une application de  $E \times E$  dans  $E$ ), c'est ce qu'on appelle une loi de composition externe, plus précisément, une multiplication externe.

On les propriétés suivantes :

- $\forall f \in E$  on a :  $1.f = f$
- $\forall f \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  on a :  $\alpha(\beta.f) = (\alpha\beta).f$
- $\forall f \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  on a :  $(\alpha + \beta).f = \alpha.f + \beta.f$
- $\forall f, g \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$  on a :  $\alpha.(f + g) = \alpha.f + \alpha.g$

L'ensemble  $E$ , muni de l'addition et de la multiplication externe, prend le nom d'espace vectoriel des fonctions numériques.

### Cas particulier

Lorsque  $A$  est l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels, les applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  ne sont autres que les suites de nombres réels. L'ensemble  $E$  prend alors le nom d'espace vectoriel des suites de nombres réels.

### 1.1.2 Structure d'espace vectoriel

Soit  $E$  un ensemble non vide muni

- 1) d'une loi interne notée  $+$ .
- 2) d'une loi externe notée  $\cdot$ .

Nous notons  $(E, +, \cdot)$  l'ensemble muni de ces deux lois.

**Définition 1.1.1.** On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  ou  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1.  $\forall x, y, z \in E$  on a :  $(x + y) + z = x + (y + z)$
2.  $\forall x, y \in E$  on a :  $x + y = y + x$
3. Il existe  $0_E \in E$  tel que  $\forall x \in E$  on a :  $x + 0_E = 0_E + x$  ( $0_E$  l'élément neutre pour  $+$ ).
4.  $\forall x \in E$  on a :  $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$  et
5.  $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
6.  $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  on a :  $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
7.  $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  on a :  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
8.  $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$  on a :  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Les éléments de  $E$  sont appelés des *vecteurs*, on note parfois le vecteur  $x$  par  $\vec{x}$ .

### Exemples

1.  $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{K}\}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. Plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{K} \forall i = 1, 2, \dots, n\}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
3.  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathbb{K}_n[X]$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

### Exercice

Soit  $E$  l'ensemble définie par :  $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, / f(x) = (ax + b)e^{3x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$   
 Montrer que  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.3 Règles de calcul dans un espace vectoriel

**Théorème 1.1.1.** *Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.*

- 1)  $\forall x \in E, 0.x = 0_E$  et  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha.0 = 0_E$
- 2)  $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha.x = 0 \iff \alpha = 0$  ou  $x = 0_E$
- 3)  $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x)$

#### Démonstration

1.  $\forall x \in E$ , on a :

$$0.x + \alpha.x = (0 + \alpha)x = \alpha.x$$

donc

$$0.x = \alpha.x - \alpha.x = 0_E$$

de même

$$\alpha.0_E + \alpha.x = \alpha.(0_E + x) = \alpha.x$$

d'où

$$\alpha.0_E = 0_E$$

2. Soit  $x \in E$  et  $\alpha \in K$  tel que  $\alpha.x = 0_E$

Si  $\alpha \neq 0$ ,

$$\alpha^{-1}(\alpha.x) = \alpha^{-1}\alpha.x = \alpha^{-1}.0_E = 0_E$$

or

$$\alpha^{-1}\alpha.x = x$$

d'où

$$x = 0_E$$

3. Si  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $x \in E$  on a :

$$\alpha.x + (-\alpha.x) = [\alpha + (-\alpha)].x = 0.x = 0_E$$

de même

$$\alpha.x + \alpha.(-x) = \alpha.[x + (-x)] = \alpha.0_E = 0_E$$

donc :

$$(-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x).$$

#### Remarque

D'après ce résultat il n'y aurait aucun inconvénient à désigner  $0_E$ , l'élément zéro de  $E$ , et le zéro de  $\mathbb{K}$  par même symbole  $0$ .

**Proposition 1.1.1.**  $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  et  $\forall(x, y) \in E^2$  on a :

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta).x &= \alpha.x - \beta.x \\ \alpha.(x - y) &= \alpha.x - \alpha.y\end{aligned}$$

## 1.2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

### 1.2.1 sous-espaces vectoriel

**Définition 1.2.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F \subset E$ ,  $F \neq \emptyset$ . On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Théorème 1.2.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une partie  $F$ , non vide, de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$ .

### Exemples

1. Pour tout espace vectoriel  $E$ ,  $\{0_E\}$  et  $E$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Tout sous-espace vectoriel différent de  $E$  et  $\{0_E\}$  est appelé sous-espace vectoriel *propre* de  $E$ .
2. Soit  $F = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , en effet :
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in F \quad (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha \cdot f(0) + \beta \cdot g(0) = 0$$
3. L'ensemble des suites qui convergent vers 0 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites numériques.
4.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .

### Remarque

Pour montrer qu'un ensemble  $F$  est un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace d'un espace vectoriel bien connu, par exemple pour montrer que l'ensemble

$$S = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

est un espace vectoriel il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

**Théorème 1.2.2.** Si  $E_1, E_2, \dots, E_m$  sont des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  alors  $\bigcap_{i=1}^{i=n} E_i$  est sous-espace vectoriel de  $E$

### Démonstration

Soit  $(x, y) \in F \times F = \bigcap_{i=1}^{i=n} E_i$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$   
alors  $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad (x, y) \in E_i^2$ , et puisque  $E_i$  est un sous-espace vectoriel, alors  $\lambda x + \mu y \in E_i$  d'où  $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i=1}^{i=n} E_i$ .

**Définition 1.2.2.** Soit  $m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) éléments  $x_1, x_2, \dots, x_m$  d'un espace vectoriel et  $m$  nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . L'élément  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$  de  $E$  est appelé combinaison linéaire des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de  $E$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  sont les coefficients respectifs de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  dans cette combinaison linéaire.

**Théorème 1.2.3. Théorème et définition** Etant donné des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_m$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé sous-espace vectoriel engendré par la partie  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  ou par la famille  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , on le note  $Vect(\{x_1, x_2, \dots, x_m\})$ .

### Démonstration

Soit  $x, y \in Vect(\{x_1, x_2, \dots, x_m\})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , alors il existe des scalaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i x_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^{i=m} \mu_i x_i$$

donc

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{i=m} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) x_i \in Vect(\{x_1, x_2, \dots, x_m\}).$$

### Exemples

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $x$  un vecteur de  $E$ , non nul.

$$Vect(x) = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

C'est la droite vectorielle engendrée par  $x$ .

2. Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$

Soit  $a = (1, -2, 3), b = (0, 3, -1)$

$$Vect\{a, b\} = \{\lambda a + \mu b / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda, -2\lambda + 3\mu, 3\lambda - \mu) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , le sous-espace vectoriel engendré par  $x \rightarrow e^{-2x}$  et  $x \rightarrow e^{3x}$  est l'ensemble  $\{x \rightarrow ae^{-2x} + be^{3x} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

4. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \{x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= Vect(\{1, i\}) \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{C}$  est considéré comme un espace vectoriel engendré par 1 et  $i$ .

5.  $\mathbb{K}_n[X] = Vect(\{1, X, X^2, \dots, X^n\})$

6.  $\mathbb{K}^n = Vect(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$  avec  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$

**Définition 1.2.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  de  $E$  est appelée famille génératrice de  $E$  si et seulement si le sous-espace vectoriel engendré par  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  est l'espace vectoriel lui-même.

### Remarque

On a vu que l'ensemble  $F$  des combinaisons linéaires de  $a_1, a_2, \dots, a_m$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ; et on a  $F \subset E$ . Donc pour démontrer que  $F = E$ , il suffit de démontrer que  $E \subset F$  c'est à dire que tout élément de  $E$  est une combinaison linéaire de  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

### Exemple

$\mathbb{K}^n = Vect(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$  avec  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ , donc  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}^n$

## 1.2.2 Sous-espaces supplémentaires

### Somme de deux sous-espaces vectoriels

**Définition 1.2.4.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle la somme de  $F$  et  $G$ , l'ensemble  $F + G = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$

**Théorème 1.2.4.** La somme de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  est un sous-espace vectoriel.

### Démonstration

$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F \times G$  on a :

$$\alpha x + \beta y = x' + y' \text{ avec } (x', y') \in F \times G$$

donc  $\alpha x + \beta y \in F + G$  et un par conséquent  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### Sous-espaces supplémentaires

**Définition 1.2.5.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  $F + G$  est dite somme directe si  $F \cap G = \{0_E\}$ .

**Théorème 1.2.5.** Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si tout

$x \in F + G$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $x = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$ .

### Démonstration

Supposons que  $x = f + g = f' + g'$  avec  $f, f' \in F$  et  $g, g' \in G$ , donc  $0 = (f - f') + (g - g')$  donc

$$f' - f = g' - g \in F \cap G = \{0_E\} \implies f = f' \text{ et } g = g',$$

d'où l'unicité de l'écriture

$$x = f + g.$$

Réciproquement, soit  $x \in F \cap G$  alors

$$x = 0 + x = x + 0$$

et par unicité  $x = 0$ , donc

$$F \cap G = \{0_E\}$$

**Corollaire 1.2.1.**  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $\forall f \in F, \forall g \in G$

$$(f + g = 0_E \implies f = g = 0_E)$$

**Définition 1.2.6.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  $F$  et  $G$  sont dits supplémentaires si ils sont en somme directe et  $F + G = E$ . On note  $F \oplus G = E$

## Remarque

$$F \oplus G = E \iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

## Exercice

Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonction numériques. Montrer que  $E$  est somme directe des sous-espaces vectoriels des fonctions pairs et des fonctions impaires.

## 1.3 Indépendance linéaire. Dimension

### 1.3.1 Indépendance linéaire

Soit  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ .

**Définition 1.3.1.** La famille  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  est dite libre ou les éléments  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sont linéairements indépendants si et seulement si  $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$  on a :

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = 0_E) \implies (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0)$$

Dans le cas contraire, la famille est dite liée ou les vecteurs sont linéairement dépendants

### Exemples

1. Soit  $a = (3, 2)$  et  $b = (1, -2)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^2$ .  $a$  et  $b$  sont linéairement indépendants, en effet, cherchons  $\lambda, \mu$  tels que :  $\lambda(3, 2) + \mu(1, -2) = (0, 0)$

$$\lambda(3, 2) + \mu(1, -2) = (0, 0) \iff \begin{cases} 3\lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \implies \lambda = \mu = 0$$

2. Soit  $a = (-2, 4)$  et  $b = (1, -2)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^2$ .  $a$  et  $b$  sont linéairement dépendants, par exemple  $a = -2b$
3.  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = e^{-x}$ ,  $f$  et  $g$  sont linéairement indépendants, en effet, soit  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha f + \beta g = 0_E$

$$\alpha f + \beta g = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \alpha e^{2x} + \beta e^{-x} = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = 0$$

### 1.3.2 Bases et dimension

**Définition 1.3.2.** On appelle base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  toute famille  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , génératrice et libre

**Théorème 1.3.1. (et définition)** Si  $E$ , espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , admet une base ayant  $n$  éléments alors toute base de  $E$  a  $n$  éléments. l'entier naturel  $n$  est appelé dimension de  $E$  et on note  $n = \dim E$ .

## Exemples

1.  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.
2.  $\mathbb{K}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On appelle base canonique de  $\mathbb{K}^n$  la base  $B = (e_i)_{i=1,2,\dots,n}$  avec  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ .  
la position  $i$
3.  $\mathbb{K}_n[X]$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .

## N.B

Dans la suite, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimensions finies.

**Proposition 1.3.1. (Définition-Proposition)** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ . Alors toute vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{k=1}^{k=n} x_k e_k$$

Dans ce cas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont appelés les coordonnées de  $x$  dans la base  $B$ .

### 1.3.3 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 1.3.3.** Soit  $F = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . On appelle rang de  $F$  l'entier  $\text{rg}F = \dim \text{Vect}(F)$ . C'est le nombre maximum de vecteurs L.I que l'on peut extraire de la famille  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

**Proposition 1.3.2. (Propriétés)** Le rang d'une famille de vecteurs reste inchangé dans les cas suivantes :

- 1) si on permute les vecteurs de la famille.
- 2) si on multiplie un vecteur par un scalaire non nul.
- 3) si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs.

### Etude d'un exemple

Dans  $\mathbb{R}^4$  on donne

$$\vec{a} = (1, 2, 3, 4); \quad \vec{b} = (3, 4, 5, 7); \quad \vec{c} = (3, 2, 1, 2)$$

Déterminons le rang de  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

$$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} - 3\vec{a} & \vec{c} - 3\vec{a} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} - 3\vec{a} & \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{a} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc  $rg(\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}) = rg(\{\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a}, 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}\}) = 2$  et la famille est liée par la relation  $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 0$

## 1.4 Applications linéaires

### 1.4.1 Définition. Exemples

**Définition 1.4.1.** *Etant donnés deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sur  $\mathbb{K}$ . On appelle application linéaire de  $E$  dans  $F$  toute application  $f$  de  $E$  dans  $F$  vérifiant :*

- (1)  $\forall x \in E, \forall y \in E \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
- (2)  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

### Notations

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  sera noté par  $\mathcal{L}(E, F)$ . Si  $f$  est une applications linéaires de  $E$  dans  $E$ , on dit que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et on note leur ensemble par  $\mathcal{L}(E)$  au lieu de  $\mathcal{L}(E, E)$

### Exemples

1. On considère  $\mathbb{R}$  comme espace vectoriel sur lui même, soit  $f$  l'application,  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

$f$  est une application linéaire.

2. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'application :

$$\begin{aligned} id_E : E &\longmapsto E \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

est linéaire, appelée *homothétie de rapport  $\lambda$* .

3. Soit  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \mathbb{R}^3$ , soit  $f$  l'application définie de  $E$  dans  $F$  par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x - y, -x + 3y, 2x - 3y)$$

$f$  est une application linéaire, en effet :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (2(\alpha x + \beta x') - \alpha y + \beta y', -\alpha x - \beta x' + 3(\alpha y + \beta y'), 2(\alpha x + \beta x') - 3(\alpha y + \beta y')) \\ &= \alpha(2x - y, -x + 3y, 2x - 3y) + \beta(2x' - y', -x' + 3y', 2x' - 3y') \\ &= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y') \end{aligned}$$

4. L'application  $\Phi$  dans  $\mathbb{R}$  de l'espace vectoriel des fonctions intégrables au sens de Riemann sur le segment  $[a, b]$  définie par  $\Phi(f) = \int_a^b f(t)dt$  est une application linéaire.
5. L'application  $\Gamma$  de  $\mathbb{k}[X]$  dans  $\mathbb{k}[X]$  définie par  $\Gamma(P) = P'$  est linéaire.

## 1.4.2 Premières propriétés des applications linéaires

Soient trois  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels  $E, F, G$ . Considérons l'application  $h = g \circ f$  composée des applications linéaires  $g$  et  $f$ , avec  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$\xrightarrow{h=g \circ f}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \forall (x, y) \in E^2$  on a :

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y) &= g[f(\alpha x + \beta y)] \\ &= g[\alpha f(x) + \beta f(y)] \\ &= \alpha g[f(x)] + \beta g[f(y)] \\ &= \alpha g \circ f(x) + \beta g \circ f(y) \\ &= \alpha h(x) + \beta h(y) \end{aligned}$$

**Théorème 1.4.1.** *L'application composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

De même on a la proposition suivante :

**Proposition 1.4.1.** *Si  $f$  et  $g$  sont deux applications linéaires et  $\lambda, \mu$  des scalaires, alors l'application  $\lambda f + \mu g$  est linéaire et si  $f$  est bijective  $f^{-1}$  est aussi une application linéaire. Dans ce dernier cas on dit que  $f$  est un isomorphisme.*

### Cas particulier

Une application linéaire bijective de  $E$  dans  $E$  est dite automorphisme de  $E$ .

### Remarque

L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel.

**Théorème 1.4.2.** *Pour toute application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$ .*

(1)  $f(0_E) = 0_F$

(2) Pour tout  $x$  de  $E$  on a  $f(-x) = -f(x)$ .

### Preuve

$\cdot \forall x \in E,$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0_E + x) \\ &= f(0_E) + f(x) \end{aligned}$$

on en déduit que  $f(0_E) = 0_F$ .

$\cdot \forall x \in E,$

$$\begin{aligned}
f(0_E) &= f(x - x) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0_F
\end{aligned}$$

donc  $f(-x)$  est l'opposé de  $f(x)$  dans  $F$ , c'est à dire  $f(-x) = -f(x)$ .

**Définition 1.4.2.** On appelle noyau d'une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  l'ensemble  $\{x \in E / f(x) = 0\}$  et image de  $f$  l'ensemble  $\{f(x) / x \in E\}$ . Et on note :

$$\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \quad \text{Im}f = \{f(x) / x \in E\}$$

### Exercice

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , définie par :

$$f(x, y) = (2x - y, x + y, 3x - 4y)$$

Déterminer  $\ker f$  et  $\text{Im}f$ .

**Proposition 1.4.2.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .  $\ker f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\text{Im}f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

### Preuve

·  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in \ker f$  on a :  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0_F$   
· Soit  $y, y' \in \text{Im}f$  et  $\alpha, \beta \in K$ , alors  $\exists x, x' \in E$  tels que :  $f(x) = y$  et  $f(x') = y'$   
 $\alpha y + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(x') = f(\alpha x + \beta x')$   
donc  $\alpha y + \beta y' \in \text{Im}f$ .

**Théorème 1.4.3.** Pour toute application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) L'application  $f$  est injective.
- (2)  $\ker f = \{0_E\}$

### Preuve

(1)  $\implies$  (2) Soit  $x \in \ker f$ ,  $f(x) = 0_F = f(0_E)$  et puisque  $f$  est injective, alors  $x = 0_E$ .

(2)  $\implies$  (1)

Soit  $x$  et  $y$  de  $E$  tels que  $f(x) = f(y)$

alors

$$f(x - y) = 0_F \iff x - y \in \ker f$$

donc si  $\ker f = \{0_E\}$ ,  $x - y = 0_E$  et par suite  $x = y$ .

**Théorème 1.4.4.** Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire bijective, alors :

- 1) L'image d'une base de  $E$  est une base de  $F$ .
- 2)  $\dim E = \dim F$

Donc deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

### Preuve

Soit  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ , avec  $n = \dim E$ , montrons que  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$  est une base de  $F$ .

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$  tels que :

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$$

alors

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = 0_F$$

et comme  $f$  est une bijection alors :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

On en déduit que  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$  est une base de  $F$  et  $\dim F = \dim E$ .

**Théorème 1.4.5. (Fondamental)** *Pour toute application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  on a :*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

on pose  $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$  .

**Corollaire 1.4.1.** *Pour toute endomorphisme  $f$  d'un espace vectoriel  $E$ , de dimension  $n$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $f$  est un isomorphisme.
- (2)  $f$  est injective.
- (3)  $f$  est surjective.
- (4)  $\ker f = \{0\}$ .
- (5)  $f$  est de rang  $n$ .



# Chapitre 2

## Matrices

### Contents

---

2.1	Généralités . . . . .	15
2.2	Opérations algébriques sur les matrices . . . . .	18
2.3	Changement de bases . . . . .	20
2.4	Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice . . . . .	23

---

### 2.1 Généralités

#### 2.1.1 Définitions diverses

**Définition 2.1.1.** On appelle matrice de type  $(n, p)$  sur  $\mathbb{k}$  toute application de  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\}$  dans  $\mathbb{k}$ . Une matrice est donc une famille double finie :

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\} & \longmapsto & \mathbb{k} \\ (i, j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array}$$

Une matrice  $A$  sera représentée soit par :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{np} \end{pmatrix}$$

Nous dirons que  $A$  est une matrice de type  $(n, p)$  ( $n$  nombre de lignes,  $p$  nombre de colonnes) leur ensemble est désigné par  $\mathcal{M}_{\mathbb{k}}(n, p)$  ou  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ .

#### Cas particuliers

- Si  $p = n$  on dit la matrice  $A$  est carrée d'ordre  $n$ , les éléments  $a_{ii}$  sont appelés éléments diagonaux de  $A$ ; leur ensemble est la diagonale principale de  $A$ . L'ensemble des matrices carrées, d'ordre  $n$ , sera noté  $\mathcal{M}_{\mathbb{k}}(n)$  ou  $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ .
- Si  $p = 1$  on dit la matrice est unicolonne.
- Si  $n = 1$  on dit la matrice est uniligne.

**Définition 2.1.2.** On appelle transposée de la matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  la matrice  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$  avec  $b_{ij} = a_{ji}$ , on la note  ${}^tA$

**Remarque**

Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$  alors  ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$ . et si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdot & \cdot & a_{np} \end{pmatrix}$$

**Exemples**

1)

$${}^t \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

2)

$${}^t \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Définition 2.1.3.** On dit qu'une matrice  $A$  est symétrique si et seulement si  ${}^tA = A$  et on dit qu'elle antisymétrique si et seulement si  ${}^tA = -A$ .

**Remarque**

· Une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  est symétrique si et seulement si  $p = n$  et  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$   $a_{ij} = a_{ji}$

· Une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  est antisymétrique si et seulement si  $p = n$  et  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$   $a_{ij} = -a_{ji}$ , en particulier on a  $2a_{ii} = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

**Définition 2.1.4.** Les matrices suivantes, d'ordre  $n$ , sont appelées respectivement, matrice triangulaire supérieure, diagonale, unité :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.1.2 Matrice et application linéaire

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions respectives  $p$  et  $n$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  une base de  $E$  et  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  une base de  $F$  et enfin  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

$\forall j = 1, 2, \dots, p, \exists a_{ij} \in \mathbb{k}, i = 1, 2, \dots, n$  tels que

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{nj}f_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}f_i$$

**Définition 2.1.5.** On appelle matrice de l'application linéaire  $f$  la matrice  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ , on la note  $M(f, (e_i), (f_j))$ .

Les vecteurs colonnes de  $M(f, (e_i), (f_j))$  sont  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$ , matriciellement :

$$M(f, (e_i), (f_j)) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_p) \\ a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{np} \end{pmatrix}_{(f_1, f_2, \dots, f_n)}$$

### Remarque

Si  $E = F$  ( $f$  est un endomorphisme), la matrice  $A$  associée à  $f$  est une matrice carrée, en général on prend la même base pour  $E$  considéré comme espace de départ et espace d'arrivé, on écrit alors :

$$A = M(f, (e_i), (e_j)) = M(f, (e_i))$$

### Exemples

. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $id_E$  l'application identique de  $E$  :

$$\begin{aligned} id_E : E &\longmapsto E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Si on prend la même base  $(e_i)$  pour  $E$  alors :

$$M(id_E, (e_i)) = I_n \quad (\text{la matrice unité d'ordre } n)$$

. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$f(x, y) = (2x - y, -3x, 3x - 5y)$$

relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  on a :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, 3x - 5y - 2z)$$

relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  on a :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

## Inversement

A toute matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on peut associer une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$ , en posant, pour chaque  $j$  :

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{nj}f_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}f_i$$

avec  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base  $\mathbb{K}^m$  et  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  une base de  $\mathbb{K}^n$ .

## 2.2 Opérations algébriques sur les matrices

### 2.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  deux matrices de type  $(n, p)$  de  $\mathbb{K}$ , elle sont associées respectivement à deux applications linéaires  $f$  et  $g$  de  $E$  dans  $F$ ,  $E$  est rapporté à une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  et  $F$  à une base  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Nous posons par définition :

$$A + B = M(f, (e_i), (f_j)) + M(g, (e_i), (f_j)) = M(f + g, (e_i), (f_j))$$

$$\lambda A = \lambda M(f, (e_i), (f_j)) = M(\lambda f, (e_i), (f_j)) \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

### Propriétés

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

**Proposition 2.2.1.** *L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  muni des opérations  $(A, B) \mapsto A+B$  et  $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .*

### 2.2.2 Produit de deux matrices

Soit trois espaces vectoriels  $E, F, G$  de dimensions respectives  $p, n, m$  sur  $\mathbb{K}$ , et des bases respectives  $(a_k)_{1 \leq k \leq p}$ ,  $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ ,  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ ; considérons les trois applications linéaires  $f, g, g \circ f$  et les trois matrices :

$$A = M(f, (a_k), (b_j)) = (\alpha_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p}$$

$$B = M(g, (b_j), (c_i)) = (\beta_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

$$C = M(g \circ f, (a_k), (c_i)) = (\gamma_{ik})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p}$$

**Définition 2.2.1.** *On pose, par définition,  $C = BA = M(g, (b_j), (c_i))M(f, (a_k), (b_j)) = M(g \circ f, (a_k), (c_i))$*

### Remarque

Remarquons que :  $A = M(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B = M(g) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ,  $C = BA = M(g \circ f) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$  et que  $\text{card}\{\text{colonnes de } B\} = \text{card}\{\text{lignes de } A\}$ .

### Calcul de coefficients de $C = BA$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a_k) &= g[f(a_k)] = g\left[\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{jk} b_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{jk} g(b_j) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{jk} \sum_{i=1}^{i=m} \beta_{ij} c_i \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_{ij} \beta_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} \beta_{ij} c_i \\ &= \sum_{i=1}^{i=m} \left[\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} \beta_{ij}\right] c_i \end{aligned}$$

et par définition on peut écrire :

$$(g \circ f)(a_k) = \sum_{i=1}^{i=m} \gamma_{ik} c_i$$

d'où, par identification :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{j=n} \beta_{ij} \alpha_{jk}$$

On peut représenter cette règle de calcul par le schéma suivant :

$$p \begin{pmatrix} \gamma_{ik} \\ m \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \beta_{i2} & \cdot & \beta_{ij} & \cdot & \beta_{in} \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \cdot \\ \alpha_{jk} \\ \cdot \\ \alpha_{nk} \\ p \end{pmatrix}$$

### Remarque

L'élément  $\gamma_{ik}$  ( $k$  numéro de la ligne,  $i$  numéro de colonne) provient des éléments de la ligne  $k$  de  $B$  et des éléments de la colonne  $i$  de  $A$ .

On dit qu'on a effectué le produit **BA Lignes à Colonnes** ( en abrégé "produit LICO").

### Notations matricielles

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $E$ ,  $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$  une base de  $F$  et  $A = M(f, (e_i), (f_j))$ .

$$\forall (x, y) \in E \times F, \text{ on pose } X = M(x, (e_i)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix}, Y = M(y, (f_j)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}. X \text{ la}$$

matrice unicolonne associée au vecteur  $x$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ . On a :

$$\underbrace{y = f(x)}_{\text{Notation vectorielle}} \iff \underbrace{Y = AX}_{\text{Notation matricielle}}$$

### Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{k})$

1) Démontrer que  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

2) Montrer que  $A{}^tA$  et  ${}^tAA$  sont des matrices carrées symétriques.

### 2.2.3 Matrices carrées inversibles ( ou régulières )

**Définition 2.2.2.** Soit  $A$  une matrice carrée, on dit que  $A$  est inversible ou régulière si et seulement si l'endomorphisme  $f$  associé à  $A$  est inversible. on pose  $A^{-1} = M(f^{-1})$ .

On note  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{k})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  inversibles.

**Proposition 2.2.2.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées inversibles et  $f, g$ , respectivement, les endomorphismes associés aux matrices  $A$  et  $B$ , alors :

1)  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \iff (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2)  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id_E \iff AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

3)  ${}^tA$  est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

**Proposition 2.2.3.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  telles que  $AB = I_n$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .

### Exercice

1. Calculer  $A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) pour les matrices suivantes : ( $\theta, x$  des réels)

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} chx & shx \\ shx & chx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} shx & chx \\ chx & shx \end{pmatrix}$$

avec  $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Montrer que ces matrices sont inversibles, calculer  $A^{-1}$  et  $A^n$  pour  $n$  de  $\mathbf{Z}$ .

## 2.3 Changement de bases

### 2.3.1 Matrice de passage d'une base à une autre

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{k}$  de dimension  $n$ ,  $B = (e_i)$  une base de  $E$  et  $B' = (e'_i)$  une deuxième base de  $E$ .

Alors  $\forall j = 1, 2, \dots, n \exists p_{ij} \in \mathbb{k}, i = 1, 2, \dots, n$  tels que :  $e'_j = \sum_{i=1}^{i=n} p_{ij}e_i$

On pose :  $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$

**Théorème 2.3.1. (Théorème et définition)** La matrice  $P$  est inversible, on l'appelle la matrice de passage de la base  $B = (e_i)$  à la base  $B' = (e'_i)$ .

**Preuve**

Soit l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} id_E & (E, B') & \longmapsto & (E, B) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

on a :  $Id_E(e'_j) = e'_j = \sum_{i=1}^{i=n} p_{ij}e_i$  donc  $P = (p_{ij}) = M(id_E, (e'_i), (e_j))$  d'où  $P$  est inversible car l'identité est inversible et  $P^{-1} = M(id_E, (e_i), (e'_i))$ .

**Remarque**

Soit  $x \in E$ . On pose  $X = M(x, (e_i))$ ,  $X' = M(x, (e'_i))$  alors on a les relations :

$$X = PX' \text{ et } X' = P^{-1}X$$

### 2.3.2 Action de changements de bases dans $E$ et dans $F$ sur la matrice d'une application linéaire de $E$ dans $F$

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  avec  $\dim E = m$  et  $\dim F = n$ . Soient  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  deux bases de  $E$  et  $(f_j)$  et  $(f'_j)$  deux bases de  $F$ . On pose :

$$A = M(f(e_i), (f_j)) \text{ et } A' = M(f, (e'_i), (f'_j))$$

$$P = M(id_E, (e'_i), (e_i)) \text{ et } Q = M(id_E, (f'_i), (f_i))$$

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{id_E} & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{id_F} & F \\ (e'_i) & & (e_i) & & (f_i) & & (f'_i) \end{array}$$

on a :

$$f = id_E \circ f \circ id_E$$

et matriciellement :

$$M(f, (e'_i), (f'_j)) = M(id_E, (f_i), (f'_i))M(f, (e_i), (f_j))M(id_E, (e'_i), (e_i))$$

c'est à dire

$$A' = Q^{-1}AP$$

## Remarque

On peut trouver la relation entre  $A$  et  $A'$  en utilisant uniquement des calculs sur les matrices, on pose :

$$Y = AX, \quad X = PX', \quad Y = QY'$$

donc

$$QY' = APX' \implies Y' = Q^{-1}APX'$$

d'où

$$A' = Q^{-1}AP$$

**Définition 2.3.1.** On dit que deux matrices carrées  $A$  et  $B$  sont semblables s'il existe une matrice carrée inversible  $P$  telle que :  $B = P^{-1}AP$

### 2.3.3 Rang d'une matrice

**Définition 2.3.2.** Soit  $A$  une matrice de type  $(m, n)$ , on appelle rang de la matrice  $A$  et on note  $rg(A)$ , le rang du système des ses vecteurs colonnes.

#### Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 18 & 4 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = rg(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \text{ avec } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ -2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculons  $rg(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \\ \vec{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}' = \vec{a} \\ \vec{b}' = 2\vec{b} - 3\vec{a} \\ \vec{c}' = 2\vec{c} - 7\vec{a} \\ \vec{d}' = \vec{d} - \vec{a} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 17 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \vec{a}'' = \vec{a}' \\ \vec{b}'' = \vec{b}' \\ \vec{c}'' = -\vec{c}' + 5\vec{b}' \\ \vec{d}'' = -3\vec{d}' + \vec{b}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}'' \\ \vec{b}'' \\ \vec{c}'' \\ \vec{d}'' = 4\vec{d}'' - \vec{c}'' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \\ 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$rg(A) = rg(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = rg(\vec{a}'', \vec{b}'', \vec{c}'') = 3$$

### Remarque

Les quatre vecteurs donnés sont liés par une relation que l'on obtient à partir de  $\vec{d}''' = \vec{0}$ . on a :  $4\vec{d}'' - \vec{c}'' = \vec{0} \implies 4(-3\vec{d}' + \vec{b}') - (-\vec{c}' + 5\vec{b}') = -\vec{b}' + \vec{c}' - 12\vec{d}' = \vec{0}$   
 $\implies -(2\vec{b}' - 3\vec{a}') + 2\vec{c}' - 7\vec{a}' - 12(\vec{d}' - \vec{a}') = \vec{0}$   
 $\implies 4\vec{a}' - \vec{b}' + \vec{c}' - 6\vec{d}' = \vec{0}$

**Théorème 2.3.2.** Soit  $A$  une matrice de type  $(m, n)$  et  $f$  l'application linéaire de  $E$  dans  $F$ , les trois nombres suivants sont égaux :

- 1) Rang de vecteurs colonnes.
- 2) Rang de vecteurs lignes.
- 3) Rang de  $f$

**Corollaire 2.3.1.** Pour qu'une matrice carrée d'ordre  $n$  soit inversible il faut et il suffit qu'elle soit de rang  $n$ .

### Preuve

En effet, cette matrice représente un endomorphisme  $f$  d'un espace vectoriel  $E$ , de dimension  $n$  sur  $\mathbb{k}$  et  $rg(f) = n = \dim E$  entraîne que  $f$  est un automorphisme, c'est à dire  $f$  est inversible.

## 2.4 Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

### 2.4.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.4.1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ . On appelle opération élémentaire sur une matrice  $A$  toute opération de l'un des types suivants :

- $(O_1)$  : addition à une ligne de  $A$  le produit par un scalaire d'une autre ligne de  $A$ .
- $(O_2)$  : produit d'une ligne de  $A$  par un scalaire non nul.
- $(O_3)$  : permutation de deux lignes de  $A$ .

### Remarque

On pose  $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n \end{pmatrix}$  ( les  $L_i$  désignent les lignes de  $A$

L'opération  $(O_1)$  correspond à la transformation  $L_i \longleftarrow L_i + L_j$  ( $i \neq j$ ).

L'opération  $(O_2)$  correspond à la transformation  $L_i \longleftarrow \lambda L_j$  ( $\lambda \in \mathbb{k}$ )

L'opération  $(O_3)$  correspond à la permutation  $L_i \longleftarrow L_j$  ( $i \neq j$ ).

**Proposition 2.4.1.** Les opérations élémentaires sur une matrice conservent le rang.

**Théorème 2.4.1.** Soit  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{k})$ . Alors il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme  $A$  en la matrice unité  $I_n$  et cette même suite d'opérations élémentaires sur les lignes transforme la matrice  $I_n$  en la matrice  $A^{-1}$ .

## 2.4.2 Exemples

1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\text{rg}A = 2$ , donc  $A$  est inversible.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Remarque

La matrice à gauche est inversible donc  $A$  est inversible, on continue :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow -4L_2 + L_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \quad \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \end{array} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$rgA = 2 < 3$ , on s'arrête ici : la matrice  $A$  n'est pas inversible.

•••••

# Chapitre 3

## Systemes lineaires

### Contents

---

3.1	Généralités et définitions . . . . .	26
3.2	Interprétation d'un système . . . . .	27
3.3	Transformations élémentaires d'un système . . . . .	28
3.4	Résolution d'un système linéaire . . . . .	28

---

### 3.1 Généralités et définitions

**Définition 3.1.1.** Un système  $(S)$  de  $m$  équations linéaires à coefficients dans  $\mathbb{k}$  à  $n$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est la donnée des équations suivantes :

$$(S') = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

·  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, 2, \dots, m$  est la  $i^{eme}$  équation du système, on la note  $L_i$ , dans cette équation, les  $a_{ij}$  sont les coefficients des inconnues  $x_j$  et  $b_i$  est le coefficient du second membre.

· Lorsque tous les  $b_i$  sont nuls le système est dit *homogène*.

· On appelle solution du système  $(S)$  tout  $n$ -uplet, d'éléments de  $\mathbb{k}$ ,  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  qui vérifié les  $m$  équations du système.

· Le système  $(S)$  est déterminé par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

appelée matrice complète du système.

## 3.2 Interprétation d'un système

### 3.2.1 Interprétation vectorielle

Le système précédent  $(S)$  étant donné, considérons les vecteurs de  $\mathbb{k}^n$  définis par :

$$\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{et} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

le système  $(S)$  est alors équivalent à l'équation vectorielle  $(S_1)$  suivante :

$$(S_1) : x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

**Théorème 3.2.1.** *Tout système  $(S)$  de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues est équivalent à une équation de la forme  $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$  où  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}$  sont des vecteurs donnés de  $\mathbb{k}^m$ . De plus la condition  $\vec{b} \in \text{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  est une condition nécessaire et suffisante pour que  $(S)$  admet au moins une solution. Cette condition étant vérifiée,  $(S)$  admet une seule solution si et seulement si la famille  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  est libre, plus d'une solution si elle est liée.*

### 3.2.2 Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Le système précédent  $(S)$  étant donné.

Notons  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq m}$  respectivement les bases canoniques de  $\mathbb{k}^n$  et  $\mathbb{k}^m$ , définissons l'application linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$  par :

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \varepsilon_j = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$$

(la colonne des coefficients de l'inconnue  $x_i$ )

Le système  $(S)$  est équivalent à l'équation :

$$(S_2) : \varphi(x) = b$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{k}^m$

**Théorème 3.2.2.** *Tout système  $(S)$  de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues est équivalent à une équation de la forme  $\varphi(x) = b$  où  $\varphi$  est une application linéaire de  $\mathbb{k}^n$  dans  $\mathbb{k}^m$ , de plus la condition  $b \in \text{Im} \varphi$  est une condition nécessaire et suffisante pour que  $(S)$  admet au moins une solution. Cette condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions de  $(S)$  s'obtient en ajoutant à l'une d'elles les vecteurs de  $\ker \varphi$ , c'est à dire les solutions du système homogène associé à  $(S)$ .*

### Exercice

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Montrer que le système  $(S)$  admet une solution unique si et seulement si  $m$  est différent de  $-1$

$$(S) = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$$

### 3.3 Transformations élémentaires d'un système

**Définition 3.3.1.** Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont même ensemble de solutions

Soit  $\lambda \in \mathbb{k}$ .

Le système précédent ( $S$ ) étant donné.

Considérons deux équations  $L_i$  et  $L_j$  ( $i \neq j$ ) du système ( $S$ ),  $L_j + \lambda L_i$  est l'équation définie par :

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + (a_{j2} + \lambda a_{i2})x_2 + \dots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = b_j + \lambda b_i$$

On considère alors les transformations suivantes :

· **Permutation de deux équations**  $L_i \longleftrightarrow L_j$

Pour  $i \neq j$ ,  $L_i \longleftrightarrow L_j$  signifie que l'on permute la  $i^{\text{ème}}$  équation et la  $j^{\text{ème}}$  équation du système. Il est immédiat que le second système est équivalent au premier.

· **Transformation**  $L_j \rightarrow L_j + \lambda L_i$

Pour  $i \neq j$ ,  $L_j \rightarrow L_j + \lambda L_i$  signifie que l'on remplace la  $j^{\text{ème}}$  équation du système par  $L_j \rightarrow L_j + \lambda L_i$

Comme les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} L_i \\ L_j \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_i \\ L_j + \lambda L_i \end{array} \right.$$

sont équivalents, alors si dans un système on remplace la  $j^{\text{ème}}$  équation du système par l'équation  $L_j + \lambda L_i$  on obtient un système équivalent au premier.

### 3.4 Résolution d'un système linéaire

Notons que le système ( $S$ ) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(S_3) : Ax = b$$

où

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{k}^m, \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{k})$$

#### 3.4.1 Méthode de pivot de Gauss

Elle consiste en une seule suite finie de transformation élémentaires qui vont associer au système ( $S$ ) un système ( $S'$ ) équivalent dont la résolution est immédiate. Supposons  $a_{11} \neq 0$  dans le système ( $S$ ), la méthode consiste dans une première étape à effectuer les transformations élémentaires :

$$L_2 \rightarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}L_1, L_3 \rightarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}L_1, \dots, L_m \rightarrow L_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}L_1$$

de manière à obtenir un système ( $S'$ ) de matrice complète :

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdot & \cdot & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \cdot & \cdot & a'_{3n} & b'_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{m2} & \cdot & \cdot & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

dans cette première série de transformations, le coefficient non nul  $a_{11}$  s'appelle le *pivot*.



où les coefficients  $a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, \dots, a'_{nn}$  sont non nuls.  $(S')$  est un système triangulaire. Il est immédiat que  $(S')$  et donc  $(S)$  possède une solution unique.

$2^{cas} : r < n$

Il existe alors  $n - r$  inconnues *secondaires*. Si l'on donne à ces inconnues secondaires des valeurs arbitraires, les inconnues principales sont alors déterminées par les équations de  $(S')$ .

Le système  $(S')$  et par conséquent le système  $(S)$  possède une infinité de solutions.

**Théorème 3.4.1.** *Si  $rgA = r = n$  le système  $(S')$  admet une solution unique donnée par :*

$$\begin{cases} x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}} = x_r \\ x_k = \frac{b'_k - \sum_{j=k+1}^n a'_{kj} x_j}{a'_{kk}}, \quad k = n-1, \dots, 2, 1 \end{cases} \quad \text{avec } b'_1 = b_1$$

*Si non le système  $(S')$  admet une infinité de solutions :*

$$\begin{cases} x_r = \frac{b'_r}{a'_{rr}} = \frac{b'_r - \sum_{k=r+1}^n a'_{rk} x_k}{a'_{kk}} \\ x_k = \frac{b'_k - \sum_{j=k+1}^n a'_{kj} x_j}{a'_{kk}} \end{cases} \quad \text{avec } (x_{r+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n-r}$$

## Exemples

1) Soit le système  $(S)$  :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = m \end{cases}$$

Le système  $(S)$  a pour matrice complète associée :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} L_1 = L'_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_1 = L'_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 = L'_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & m+1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} L'_1 = L''_1 \\ L'_2 = L''_2 \\ L'_3 \rightarrow L'_3 - \frac{3}{-2} L'_2 = L''_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix}$$

donc le système  $(S)$  admet pour système équivalent le système  $(S')$  suivant :

$$(S') : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 0 = m + 1 \end{cases}$$

donc le système  $(S')$  admet des solutions si et seulement si  $m = -1$  et dans ce cas les inconnues  $x_1, x_2$  sont principales et  $x_3, x_4$  sont les inconnues secondaires

L'ensemble de solutions de  $(S)$  est alors donné par :

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$$

2) Soit le système  $(S)$  :

$$(S) : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = a \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = b \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = c \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = d \end{cases}$$

Le système  $(S)$  a pour matrice complète associée :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & b \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & c \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} L_1 = L'_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 = L'_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 = L'_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 2L_1 = L'_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & b' = b - 2a \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & c' = c - 3a \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & d' = d - 2a \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} L'_1 = L''_1 \\ L'_2 = L''_2 \\ L'_3 \rightarrow L'_3 + 4L'_2 = L''_3 \\ L'_4 \rightarrow L'_4 + 5L'_2 = L''_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & b' = b - 2a \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & c'' = c' + 4b' \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & d'' = d' + 5b' \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} L''_1 = L'''_1 \\ L''_2 = L'''_2 \\ L''_3 = L'''_3 \\ L''_4 \rightarrow L''_4 - L'''_3 = L'''_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & b' = b - 2a \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & c'' = c' + 4b' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d''' = d'' - c'' \end{bmatrix}$$

le système  $(S)$  admet alors pour système équivalent le système  $(S')$  défini par :

$$(S') : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = a \\ -x_2 - x_3 = b' \\ -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = c'' \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = d''' \end{cases}$$

1° cas : Si  $d''' \neq 0$ , alors on a un système impossible ( $S = \emptyset$ )

2° cas : Si  $d''' = 0$ , c'est à dire  $d + b - c - a = 0$ , alors on a trois pivots non nuls, les inconnues  $x_1, x_2, x_3$  sont les inconnues principales et  $x_4, x_5$  sont les inconnues secondaires.

L'ensemble des solutions de  $(S')$  et par conséquent de  $(S)$  est alors donné par :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{-1}{8}(c'' - 4x_4 + 5x_5) \\ x_2 = -b' - x_3 \\ x_1 = a + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x_3 = \frac{-1}{8}c'' + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \\ x_2 = -b' - \frac{1}{8}c'' - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ x_1 = a - 2b' + \frac{3}{8}c'' - \frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \end{cases} \quad (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2$$

•••••