Cours de Mathématiques

1. Nombres complexes
2. Suites numériques
3. Fonctions numériques
4. Drivabilité
5. polynômes
6. Développements limités

Pour BCPST 1

Année scolaire : 2004/2005

16 juin 2005

Mohamed TARQI

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

Contents

1.1 Rappel

1.1.1 Corps des nombres complexes

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire l'ensemble des nombres de la forme $z = x + iy$, avec x et y des nombres réels et $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$, elles sont définies par :

$$\bullet (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b' + b)$$
$$\bullet (a + ib).(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication est un **corps commutatif,** ce qui signifie que :

• l'addition est commutative : pour tout z et z' de $\mathbb{C}$

$$z + z' = z' + z;$$

• l'addition est associative : pour tout z, z' et z'' de $\mathbb{C}$

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'');$$

bullet l'addition possède un élément neutre : $0 = 0 + i0$, tel que pour tout z de $\mathbb{C}$

$$z + 0 = 0 + z = z;$$

• tout nombre complexe $z = a + ib$, possède un opposé $-z = -a - ib$ qui vérifie

$$z + (-z) = (-z) + z = 0;$$

• la multiplication est commutative : pour tout z et z' de $\mathbb{C}$

$$z.z' = z'.z;$$

• la multiplication est associative : pour tout z, z' et z'' de $\mathbb{C}$

$$(z.z').z'' = z.(z'.z'');$$

• la multiplication possède un élément neutre : $1 = 1 + i0$, tel que pour tout z de $\mathbb{C}$

$$z.1 = 1.z = z;$$

• tout nombre complexe non nul $z = a + ib$, possède un inverse, noté z^{-1}ou $\frac{1}{z}$ égale à $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ et qui vérifie

$$z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1;$$

• la multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tout z, z' et z'' de $\mathbb{C}$

$$z.(z' + z'') = z.z' + z.z'',$$
$$(z' + z'').z = z'.z + z''.z.$$

Définition 1.1.1. *À tout nombre complexe $z = x + iy$, on associé :*
• *sa partie réelle $Re(z) = x$ et sa partie imaginaire $Im(z) = y$,*
• *le nombre complexe conjugué $\bar{z} = x - iy$.*

Propriétés

Soit z un nombre complexe, on a :
• $z + \bar{z} = 2Re(z)$.
• $z - \bar{z} = 2iIm(z)$.
• $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ et $\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$.

1.1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Soit E le plan euclidien, ξ l'ensemble des vecteurs du plan, et $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E

Les applications suivantes, (a, b étant des réels),

$$\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \xi \\ z = a + ib \longrightarrow \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow E \\ a + ib \longrightarrow M \text{ (où } \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} \text{)} \end{cases}$$

sont des bijections

On dit que $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est le **vecteur image** du nombre complexe $z = a + ib$ et que M est le **point image** ou tout simplement l'image de z.

Le nombre z est appelé **affixe** du point M et affixe du vecteur $\vec{v}$.

Propriétés

- Image de deux nombres complexes opposés : Elles sont symétriques par rapport à l'origine O.
- Image de deux nombres complexes conjugués : Elles sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et le milieu I de $[A, B]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Exercice : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les images des nombres $1, z, z' = 1 + z^2$ soient alignées.

Solution : Notons A et M' les images des nombres 1 et z'

On a

$z_{\overrightarrow{AM}} = x - 1 + iy$ et $z_{\overrightarrow{AM'}} = x^2 - y^2 + i2xy$.

Donc les points A, M, M' sont alignés si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$ d'où :

$$y(x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

L'ensemble cherché est donc constitué par la droite d'équation $y = 0$, c'est à dire l'axe des x et par le cercle de centre A et de rayon 1.

1.2 Module d'un nombre complexe

Définition 1.2.1. *On appelle **module** d'un nombre complexe $z = x + iy$ le réel positif* $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque

- Si M est l'image de z et $\vec{v}$ le vecteur-image de z, on a : $|z| = OM = \|\vec{v}\|$.
- Si A et B sont deux du plans alors $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$
- $|Im(z)| \leq |z|$ et $|Re(z)| \leq |z|$ avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.2.1. *On a les propriétés suivantes :*

a) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.
b) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|zz'| = |z|\,|z'|$.
c) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. (*Inégalité triangulaire*)

Démonstration :

a) C'est clair.
b) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= zz'\overline{zz'} \\ &= z\bar{z}.z'\overline{z'} \\ &= |z|^2\,|z'|^2. \end{aligned}$$

c) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} |z + z'| &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')(\bar{z} + \overline{z'}) \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\bar{z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(z\overline{z'}) \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z\overline{z'}| = (|z| + |z'|)^2. \end{aligned}$$

□

Remarques

1. L'égalité a lieu si et seulement si $Re(Z) = |Z|.(Z = z\overline{z'})$ c'est à dire $Re(Z) \in \mathbb{R}^+$.
   Si $z' = 0$,cette condition est remplie, sinon compte tenu de $z = \frac{Z}{|z'|^2}z$, cette condition s'écrit $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^+$.
2. De même on a : $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
3. On démontre par récurrence que :

$$|z_1 z_2 ... z_n| = |z_1|\,|z_2| ... |z_n| \qquad \text{et} \qquad |z_1 + z_{2+} ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... |z_n|$$

1.3 Argument d'un nombre complexe non nul

1.3.1 Rappel

On part des fonctions **cosinus** et **sinus**. On pose :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

On a :
- $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\left| e^{i\theta} \right| = 1$
- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}\, e^{i\theta'}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ , e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n$. Elle porte le nom de formule de **Moivre**.
- $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (Formules d'**Euler**)

1.3.2 Argument d'un nombre complexe non nul

Théorème 1.3.1. ***(admis)***
Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.

Remarque

θ n'est pas unique, car si $z = e^{i\theta}$, alors $z = e^{i(\theta+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.3.1. *Soit z un nombre complexe non nul, on appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$, l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$, tel que :$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.*
Tout élément de $\arg(z)$ sera appelé un argument de z. Par abus de langage, on note aussi $\arg(z)$ n'importe quel élément de cette ensemble modulo 2π.
Ainsi :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^*, \exists r > 0 \ et\ \theta \in \mho R$$

tel que $z = re^{i\theta}$
avec :

$$r = |z|\,, \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad et \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Propriétés

On les propriétés suivantes :

1) $\begin{cases} z \text{ réel} \iff z = 0 \text{ ou } \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ z \in i\mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $z' = z \iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $z' = -z \iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z) + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4) $z' = \bar{z} \iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

5) Pour z et z' non nuls, on a :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad \text{et} \quad \arg(\tfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z').$$

Démonstration :

Preuve de 5) Posons $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

· $zz' = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

d'où

$$\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$$

· $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i\theta}e^{-i\theta'} = \frac{r}{r'}e^{i\theta}e^{i(-\theta')} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

d'où

$$\arg(\tfrac{z}{z'}) = \theta - \theta' = \arg(z) - \arg(z').$$

□

Définition 1.3.2. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On pose, par définition :*

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}}$$

Propriétés

· $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

· Dérivation de la fonction $x \longrightarrow e^{mx}$ à variable réelle ($m \in \mathbb{C}$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^{imx})' = me^{imx}$$

1.4 Applications

1.4.1 Résolution,dans $\mathbb{C}$,de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b, c des réels et $a \neq 0$)

On pose $T(z) = az^2 + bz + c$

On a $T(z) = a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\triangle}{4a^2}]$, avec $\triangle = b^2 - 4ac$.

Si $\triangle = 0$, $T(z)$ a l'unique solution $\frac{-b}{2a}$.

Si $\triangle \neq 0$, on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées de $\triangle$; $T(z)$ a deux solutions $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.

Remarques

1) Dans $\mathbb{C}$, tout équation de second degré admet des solutions.

2) Si $\triangle > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes.

1.4.2 Formule de *Moivre* et application trigonométrique

Expressions de $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

En appliquant la formule de *Moivre* et la formule de binôme :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos^{n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta) \end{aligned}$$

d'où, en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{array}{rcl}\cos(n\theta) & = & \cos^n(\theta) - C_n^2 \cos^{n-2}(\theta)\sin^2(\theta) + C_n^4 \cos^{n-4}(\theta)\sin^4(\theta) - ... \\ \sin(n\theta) & = & C_n^1 \cos^{n-1}(\theta)\sin(\theta) - C_n^3 \cos^{n-3}(\theta)\sin^3(\theta) + ...\end{array}$$

Exemples

- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$
- $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - \cos(\theta)$
- $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$

Linéarisation de $\sin^n\theta$) et $\cos^n\theta$)($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)

On a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

donc, en utilisant la formule de *Moivre* et la formule de binôme, on peut exprimer $\sin^n(\theta)$ et $\cos^n(\theta)$ sous forme de combinaisons linéaires de termes de la forme $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.

Exemple Linéarisation de $\sin^3 x \cos^2 x$.

$$\begin{array}{rcl}\sin^3 x\cos^2 x & = & (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^3(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^2 \\ & = & -\frac{1}{2^5 i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\ & = & -\frac{1}{2^5 i}(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\ & = & -\frac{1}{2^4}(\sin(5x) - \sin(3x) - 2\sin(x))\end{array}$$

Remarques

1) On peut ramener le calcul des primitives de $\sin^n(\theta)$ et de $\cos^n(\theta)$ à celui de primitives de fonctions de la forme $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.

2) On linéariserait de même un produit de type $\sin^n(\theta)\cos^m(\theta)$.

Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$ (a, b réels non nuls)

Posons $a + ib = re^{i\alpha}$.

Alors :

$$\begin{aligned}a\cos(x) + b\sin(x) &= rRe(e^{i(\alpha - x)}) \\ &= r\cos(\alpha - x)\end{aligned}$$

Remarques

1) On utilisera cette transformation pour résoudre des équations du type : $a\cos(x) + b\sin(x) = c$

2) On a :

$$r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

●●●●●●●●●●

Chapitre 2

Suites numériques

Contents

Dans ce chapitre $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Préliminaire

1. **Majorants, minirants.**
   • Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. S'il existe un élément $M \in \mathbb{R}$ (resp.$m \in \mathbb{R}$) tel que :$\forall x \in A$, $x \leq M$ (resp.$m \leq x$) on dit que A est une partie majorée (resp.minorée) de $\mathbb{R}$ et que M (resp.m) est un majorant (resp.minorant) de A.
   • Une partie bornée est une partie à la fois majorée et minorée.

   Exemples
   (a) Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est majorée et minorée.
   (b) $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
2. **Borne supérieure, borne inférieure**
   • Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, cet élément est appelé borne supérieure de A et se note $\sup A$.
   • On introduit de même la notion de borne inférieure et on la note $\inf A$.

3. **Une caractérisation.**

   Théorème 2.1.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un élément M de $\mathbb{R}$ est borne supérieure de A si et seulement si M vérifie les deux conditions :*

   - $\forall x \in A, x \leq M.$
   - $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leq M.$

   La première propriété traduit le fait que M majore A, la seconde qu'un réel strictement inférieure à M n'est pas un majorant de A.

Exercice : Donner une caractérisation de la borne inférieure d'une partie.

Théorème 2.1.2. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ; toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Exemples

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x < 1\}$ admet pour borne inférieure 0 et pour borne supérieure $1 \notin A$.
2. $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ est archimédien), ce qui peut se traduire par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

3. $\sup\{x \in \mathbb{Q}^+ \ / \ x^2 < 2\} = \sqrt{2}$

Exercice : Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$.

Rappel

Une suite numérique est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{k}$; au lieu de la noter

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ & n & \longrightarrow & u(n) \end{array}$$

on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$

Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{k} = \mathbb{C}$) on dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle (resp.complexe). Pour chaque n de $\mathbf{N}$, u_n est appelé le $n^{ième}$ terme de la suite.

2.2 Convergence et divergence d'une suite

2.2.1 Définitions.

Définition 2.2.1.

1. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{k}$ si et seulement si :* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : (\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 => |u_n - l| \leq \varepsilon)$ *et on écrit :* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = l$
2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est divergente si et seulement si elle ne converge pas.*

Remarque

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$|u_n - l| \le \varepsilon \Longleftrightarrow u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\Longleftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$

Cela signifie que u_n est aussi proche de l que l'on veut pour n suffisamment grand.

Exemples

1. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
2. $(\frac{1}{n})_{n\ge 1}$ converge vers 0.
   En effet :
   Soit $\varepsilon > 0$,cherchons à avoir $\frac{1}{n} \le \varepsilon$.
   si $n_0 = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$,alors $n \ge n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} \le \varepsilon$.
   Autrement :
   $\mathbb{R}$ est archimédien, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$, alors :
   $\forall n > N$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

Définition 2.2.2.
a) Une suite réelle est dite majorée (resp.minorée) si et seulement si :

$$\exists A \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n < A (resp. u_n > A).$$

b) Une suite complexe est dite bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \textit{tel que :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M.$$

Exemples

$\cdot\ u_n = 1 + (-1)^n,\ 0 \le u_n \le 2.$
$\cdot\ v_n = \frac{1}{2}e^{2in},\ |v_n| \le 1.$

Définition 2.2.3. ***(Limite infinie*** *) Soit $(u_n)_{n\ge 0}$ une suite réelle.*
a) On dit que $(u_n)_{n\ge 0}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$(\forall A > 0) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n > n_0 \Longrightarrow u_n > A)$$

et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

b) On dit que $(u_n)_{n\ge 0}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si $(-u_n)_{n\ge 0}$ tend vers $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

2.2.2 Propriétés des suites réelles convergentes

Théorème 2.2.1. *Toute suite réelle ou complexe convergente est bornée.*

Démonstration :

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in N$, tel que $n \geq n_0 => |u_n - l| \leq 1$
on a donc pour tout $n \geq n_0$: $|u_n| \leq 1 + |l|$
soit

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{n-1}|, 1 + |l|\}$$

on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

□

Remarque

La réciproque du théorème n'est vraie en général, il existe des suites bornées non convergentes, par exemple : $u_n = (-1)^n$.

Proposition 2.2.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un suite numérique, si les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont même limite alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.*

La preuve en exercice.

Proposition 2.2.2. ***(Théorème d'encadrement)***
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles telles que :

1. $\exists n_0 \in N : \forall n \in N,\ n \geq n_0 => v_n \leq u_n \leq w_n$
2. $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$
il existe n_1 et n_2 de $\mathbb{N}$ tels que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_1 \Longrightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_2 \Longrightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon$$

En notant $n' = \max(n_1, n_0, n_2)$
on a donc pour tout $n \geq n_0$

$$-\varepsilon < v_n - l < u_n - l < w_n - l < \varepsilon$$

donc $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l. □

Exemple On montre que : $\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$
On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = \lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{n+1}{n}) = 0.$$

Proposition 2.2.3. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que :*
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow v_n \leq u_n \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$
alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Démonstration :

Soit $A > 0$.
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Longleftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n > n_1 \Longrightarrow v_n > A \quad \text{et} \quad v_n \leq u_n)$$
alors
$$(\forall n \in N)\ (n > n_2 \Longrightarrow u_n > A)$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
□

Exemple Soit $a > 1$, on a $a^n \geq 1 + n(a-1)$, en effet :
$$\begin{aligned} a^n &= (1+a-1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \mathtt{C}_n^k (a-1)^n \\ &= 1 + n(a-1) + \sum_{k=2}^{k=n} \mathtt{C}_n^k (a-1)^n \\ &\geq 1 + n(a-1) \end{aligned}$$
comme $\lim_{n\to+\infty} [1 + n(a-1)] = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

2.2.3 Propriétés algébriques des suites convergentes

Proposition 2.2.4. *Soit $\lambda \in \mathbb{k}$. $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques $(l, l') \in \mathbb{k}$, on a :*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = ll'$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *est bornée* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0.$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $l \neq 0 => (\frac{1}{u_n})_{n\geq 0}$ *est défini à partir d'un certain rang et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

Proposition 2.2.5. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles,on a :*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty.$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty.$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$

2.2.4 Exemples de suites

Suites arithmétiques

Définition 2.2.4. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{k}$ est dite **arithmétique** si et seulement si, il existe r de $\mathbb{k}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé la raison de suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$ de raison r est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

Suites géométriques

Définition 2.2.5. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{k}$ est dite **géométrique** si et seulement si, il existe q de $\mathbb{k}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$

q est appelé la raison de suite géométique $(u_n)_{n\geq 0}$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n$$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ de raison q est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Théorème 2.2.2. *Soit $q \in \mathbb{R}$, la suite $(q^n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$, de plus :*
- $|q| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 0$
- $q \in]1, +\infty[\Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = +\infty.$

Démonstration :

Si $q \in]1, +\infty[$
alors $q^n \geq 1 + n(q-1) \implies \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = +\infty.$
Si $|q| < 1$
alors $\frac{1}{|q|} > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (\frac{1}{|q|})^n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |q^n| = +\infty$
et par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |q^n| = +\infty. \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 0$$

□

Suites arithmético-géométrique

Définition 2.2.6. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{k}$ est dite **arithmético-géométrique** si et seulement si,il existe q et r de $\mathbb{k}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r + q u_n$$

Étude de ces suites en exercice.

2.3 Suites réelles monotones

2.3.1 Définitions

Définition 2.3.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.*
- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante (resp.décroissante) si et seulement si*

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n (resp. u_n \geq u_{n+1})$$

- *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante (resp.strictement décroissante) si et seulement si*

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} < u_n (resp. u_n > u_{n+1})$$

• *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite monotone (resp.strictement monotone) si et seulement si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante ou décroissante (resp.strictement croissante ou décroissante)*

Exemple

$n \geq 1$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

Théorème 2.3.1.

1) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
2) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Démonstration :

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ suite réelle croissante et majorée.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   $\exists\ M \in \mathbf{R} : \forall n \in N, u_n \leq M$. cela revient à dire que l'ensemble $E = \{u_n, n \in N\}$ est majorée par M, donc l'ensemble E admet une borne supérieure l dans $\mathbb{R}$, d'après la caractérisation de la borne supérieure il existe $u_p \in E : l - \varepsilon < u_p \leq l$. Donc $\forall n \geq p$ on a $0 \leq u_p \leq u_n \leq l$, alors $0 \leq l - u_n \leq \varepsilon$ ce qui prouve que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.
2. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle décroissante et minorée alors $(-u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle croissante et majorée, donc $(-u_n)_{n\geq 0}$ converge et de même pour $(u_n)_{n\geq 0}$.

$\square$

Exemple

$n \geq 1$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$
On a $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et $u_n \leq n\frac{1}{n+1} < 1$
donc $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Proposition 2.3.1.

1) Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$
2) Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

2.3.2 Suites adjacentes

Définition 2.3.2. *Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ sont dites adjacentes si et seulement si*
- $(u_n)_{n\geq 0}$ *est croissante*
- $(v_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante*
- $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty}(v_n - u_n) = 0$

Proposition 2.3.2. *Si deux suites réelles sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.*

Démonstration :

Notons $w_n = v_n - u_n$.
• La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est décroissante car :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \\ &= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0 \end{aligned}$$

puisque $(w_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et de limite 0, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$
• Ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par v_0 donc converge vers un réel l et $(v_n)_{n\geq 0}$ décroissante minorée par u_0 donc converge vers l'.
• Comme $\lim\limits_{n\to +\infty}(v_n - u_n) = 0$, alors $l - l' = 0$ □

Exemple On considère les suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \tfrac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{avec } 0 < a_0 < b_0$$

• On a $a_n > 0$ et $b_n > 0$
d'où

$$\begin{aligned} a_n \leq b_n &\iff a_n^2 \leq b_n^2 \\ &\iff a_{n-1}b_{n-1} \leq (\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2})^2 \\ &\iff a_{n-1}b_{n-1} \leq \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1}}{4} \\ &\iff 4a_{n-1}b_{n-1} \leq a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} \\ &\iff a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 - 2a_{n-1}b_{n-1} \geq 0 \\ &\iff (a_{n-1} - b_{n-1})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$
• $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, en effet :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \tfrac{a_n + b_n}{2} \leq \tfrac{2b_n}{2} = b_n$$

• d'autre part $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$, en effet :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2} &\iff \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &\iff a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \\ &\iff a_n \leq b_n \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$

d'où $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, donc les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes, et par conséquent elles convergent vers la même limite.

Exercice : Montrer que les suites $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ sont adjacentes.

• • • • • • • • • • •

Chapitre 3

Fonctions numériques : Limites et continuité

Contents

On rappelle qu'une fonction numérique d'une variable réelle, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, est une **relation** qui à tout élément de D_f associé un **unique** nombre réel.

3.1 Limite d'une fonction en un point

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1. ***(Voisinage d'un point)***

• *Si a est un réel, on appelle voisinage de a toute partie V de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert centré en a, c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\subset V$*

• *Si $a = +\infty$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]b, +\infty[$*

• *Si $a = -\infty$, on appelle voisinage de $-\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\infty, b[$*

Dans tous les cas, on note $V(a)$ un voisinage de a.

Définition 3.1.2. ***(Limite finie)***
Soit f fonction numérique définie sur D_f . On suppose que f est définie sur un voisinage $V(x_0)$ de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$), sauf peut-être en x_0.
On dit que f admet la limite l ($l \in \mathbb{R}$) au point x_0 si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \alpha > 0) : (\forall x \in D_f) : 0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Notation : Si f admet la limite l au point x_0, on note

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x \neq x_0} f(x) = l$$

3.1.2 Exemples

1. La fonction $f : x \longrightarrow x^2$ admet la limite 0 au point 0.
   En effet, soit $\varepsilon >$, pour que $|f(x)| < \varepsilon$, il suffit que $|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.
   Donc il existe $\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. tel que $|x| < \alpha \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$
2. $f(x) = x^2 + 2, x_0 = 0$
   Soit $\varepsilon > 0$. Nous cherchons à avoir $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ (1)
   Pour tout x on a $\left|x^2 + 2 - 2\right| = \left|x^2\right| = |x|^2$
   donc pour avoir (1) il suffit que $|x| < \sqrt{\varepsilon}$
   ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \sqrt{\varepsilon} : |x| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$
   Soit $\varepsilon > 0$, pour tout réel x on a :$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|x-3|}{3|x|}$
   Si $|x - 3| < 1$, nous aurons $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
   et par conséquent :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|x-3|}{3\,|x|} < \frac{1}{6}\,|x-3|$$

   Si $\alpha = \inf(1, 6\varepsilon)$ et $|x - 3| < \alpha$ alors $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

3.2 Fonction continue en un point

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1. *Une fonction f définie sur un intervalle I est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \alpha >) : (\forall x \in D_f) : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Définition 3.2.2. *Une fonction f définie sur un intervalle de centre x_0 est discontinue en x_0 s'elle n'est pas continue en x_0.*

Exemple

$f(x) = E(x)$ ($E(x)$ la partie entière de x)
f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

3.2.2 Propriétés

On déduit le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle a une limite en x_0 et cette limite est $f(x_0)$.*

Théorème 3.2.2. *Si une fonction f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, il existe un intervalle I tel que pour tout x de I les nombres $f(x)$ et $f(x_0)$ soient de même signe.*

Démonstration :

Supposons par exemple $f(x_0) > 0$, choisissons ε tel que $0 < \varepsilon < f(x_0)$, alors on a : $0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) + \varepsilon$; il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow 0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

c'est à dire $0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x_0)f(x) > 0$ $\square$

Remarque

On a le même résultat en remplaçant f continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ par f admet une limite $l \neq 0$ en x_0

Définition 3.2.3. *(**Prolongement par continuité**)*
Soit une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle de centre x_0, mais pas en x_0 et admettant une limite l en x_0
Considérons la fonction :

$$g : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{définie par} : \begin{cases} \forall x \in D_f : \; g(x) = f(x) \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

*Cette fonction g est continue en x_0 car $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. On dit que g est un **prolongement par continuité** de f en x_0.*

Exemple
$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$. f n'est pas définie en 0 mais

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$$

Donc la fonction

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

est un prolongement par continuité de f en $x_0 = 0$.

3.3 Compléments

3.3.1 Limite à droite, limite à gauche.

Définition 3.3.1. *On dit qu'une fonction f définie à droite de x_0 a une limite l à droite de x_0 si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \alpha > 0) : 0 < x - x_0 < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

et on écrit :

$$\lim_{x - x_0^+} f(x) = l \quad ou \lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} f(x) = l$$

De même f, définie à gauche de x_0, a une limite l à gauche au point x_0 si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \alpha > 0) : -\alpha < x - x_0 < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

et on écrit :

$$\lim_{x - x_0^-} f(x) = l \ ou \lim_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} f(x) = l.$$

Exemple

$f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{x}$. $\lim_{x - 0^-} f(x) = -1$ et $\lim_{x - 0^+} f(x) = 1$.

3.3.2 Continuité à droite, continuité à gauche

Définition 3.3.2. *On dit qu'une fonction f définie en x_0 et à droite de x_0 est continue à droite de x_0 si et seulement si :*

$$\lim_{x - x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

De même f, définie pour x_0 et à gauche de x_0, est continue à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x - x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

On le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Pour qu'une fonction soit continue au point x_0, il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche de x_0 et* $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$.

3.3.3 Continuité sur un intervalle.

Définition 3.3.3.

• *Soit I l'un des intervalles de la forme :*$]a, b[,]a, +\infty[, R =]-\infty, +\infty[$

On dit que fonction f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

• *Soit l'intervalle fermé ou le segment $S = [a, b], a < b$.*

On dit que fonction f est continue sur S si et seulement si :

a) f est continue en tout point x tel que $a < x < b$;
b) f est continue à droite de $x = a$;
c) f est continue à gauche de $x = b$.

3.4 Opérations sur les limites et les fonctions continues

On montre à l'aide de la définition de la limite les résultats suivants :

Théorème 3.4.1. *Étant donné deux fonctions f et g ayant chacune une limite en x_0 et un nombre réel λ, les fonctions $f + g, \lambda f, fg$ ont une limite en x_0 et on a :*

1) $\lim_{x \longrightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)$
2) $\lim_{x \longrightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$
3) $\lim_{x \longrightarrow x_0} fg(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x). \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)$.

Corollaire 3.4.1. *Étant donné deux fonctions f et g continue en x_0 et un nombre réel λ, les fonctions $f + g, \lambda f, fg$ sont continue en x_0 .*

Théorème 3.4.2. *Étant donné une fonction g ayant une limite non nulle en x_0, la fonction $\frac{1}{g}$ a une limite en x_0 et on a :* $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)}$.

Corollaire 3.4.2. *Si g est continue en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$est continue en x_0.*

Théorème 3.4.3. *(**Composée de deux fonctions**)*
Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \subset I$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque g est continue en $f(x_0)$, alors :

$$(1) \quad (\exists \beta > 0)(\forall y \in J) \qquad |y - f(x_0)| < \beta => |g(f(x) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

et la continuité de f en x_0 entraîne :

$$(2) \qquad (\exists\alpha > 0) \ \ (\forall x \in I) \qquad |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta.$$

de (1) et (2) on déduit :

$$(\exists\alpha > 0) \ \ (\forall x \in I) \quad |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |g(f(x) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Donc $g \circ f$ est continue en x_0. □

Exemples des fonctions continues

a) Toute fonction constante : $x \longrightarrow \lambda$ (λ réel) est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Toute fonction polynômiale : $x \longrightarrow a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Toute fonction rationnelle : $x \longrightarrow \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_p x^p + ... + b_1 x + b_0}$ est continue sur son domaine de définition.
d) Les fonctions cosinus et sinus $x \longrightarrow \cos(x)$, $x \longrightarrow \sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
e) La fonction tangente $x \longrightarrow \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3.5 Extension de la notion de la limite

3.5.1 La fonction f a pour limite l quand x tend vers $\pm\infty$.

Définition 3.5.1.

a) *Soit une fonction définie sur* $]a, +\infty[$. *On dit que* f *a pour limite* l *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si et seulement si on a :*

$$(\forall\varepsilon > 0), (\exists\alpha > 0) : x > \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

b) *Soit une fonction définie sur* $] - \infty, a[$. *On dit que* f *a pour limite* l *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si et seulement si on a :*

$$(\forall\varepsilon > 0), (\exists\alpha > 0) : x < -\alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

3.5.2 La fonction $|f|$ a pour limite$+\infty$ en un point x_0.

Définition 3.5.2. *On dit qu'une fonction* $|f|$ *a pour limite* $+\infty$ *au point* x_0 *si et seulement si on a :*

$$(\forall A > 0), (\exists\alpha > 0) : 0 < |x - x_0| < \alpha => |f(x)| > A$$

3.5.3 La fonction $|f|$ a pour limite$+\infty$ quand x tend vers$\pm\infty$.

Définition 3.5.3. *On dit qu'une fonction* $|f|$ *a pour limite* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $\pm\infty$ *si et seulement si on a :*

$$(\forall A > 0), (\exists B > 0) : |x| > B \Longrightarrow |f(x)| > A.$$

Exemple

$f(x) = x^3$
Soit $A > 0$ nous cherchons à avoir $|x^3| > A$
Si $|x| > 1$
alors $x^2 > |x|$ et $|x^3| > x^2$ d'où $|x^3| > |x|$
soit $B = sup(1, A)$
on peut écrire :

$$|x| > B \Longrightarrow |x^3| > A.$$

Donc $\lim_{x \longrightarrow +\infty} |x^3| = +\infty$.

Extensions des opérations sur les limites

Enoncé des résultats :

	si f a pour limite	et si g a pour limite	alors $(f+g)$ a pour limite
1	l	$+\infty$	$+\infty$
2	l	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut conclure

	si $\|f\|$ a pour limite	et si $\|g\|$ a pour limite	alors $\|fg\|$ a pour limite
1	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	$+\infty$	on ne peut conclure
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

	si$\|g\|$ a pour limite	alors $\frac{1}{\|g\|}$ a pour limite
1	0	$+\infty$
2	$+\infty$	0

Théorème 3.5.1. ***(Théorème de la limite monotone)***

• *Si f est une fonction croissante et majorée sur $]a, b[$ $(a < b)$, elle admet une limite finie à gauche quand x tend vers b*
Même résultat si b est remplacé par $+\infty$.
• *Si f est une fonction croissante et minorée sur $]a, b[$ $(a < b)$, elle admet une limite finie à droite quand x tend vers a.*
Même résultat si a est remplacé par $-\infty$.

Remarque

On montre que, dans le premier cas : $\lim_{x \longrightarrow b^-} f(x) = \sup\{f(x)/x \in]a, b[\}$ et, dans le deuxième cas $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x)/x \in]a, b[\}$

3.6 Fonctions réciproques

3.6.1 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 3.6.1. *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Il en résulte que :
Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes, c'est à dire :

$$f([a, b]) = [m, M]$$

et

$$\exists \alpha \in [a, b] \text{ tel que } f(\alpha) = m \text{ et } \exists \beta \in [a, b] \text{ tel que } f(\beta) = M.$$

Théorème 3.6.2. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***
Si f est continue sur un intervalle I de R et $(\alpha, \beta) \in I^2$. Si $f(\alpha) < y < f(\beta)$ alors $\exists x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Applications

1. Tout polynôme de degré impaire admet au moins une racine dans $\mathbf{R}$.
   Soit $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ un tel polynôme.
   Supposons pour simplifier que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} P(x) = -\infty$

   $$\exists A \in \mathbb{R}^{+*} \ tel \ que \ x \geq A \Longrightarrow P(x) \geq 1 \ et \ x \leq -A \Longrightarrow P(x) \leq -1$$

   en particulier $P(-A) < 0 < P(A)$
   donc il existe $\alpha \in [-A, A]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

2. Les suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Théorème 3.6.3.
   Soit $(u)_{n \geq 0}$ une suite définie par la relation $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n). \\ u_0 \ donné \end{cases}$, avec f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$.
   Si $(u)_{n \geq 0}$ est convergente alors sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$.

   Exemple

   $$\begin{cases} u_{n+1} = \sin u_n. \\ u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

   $]0, \frac{\pi}{0}]$ est stable par la fonction sinus, donc $\forall n \geq 0$, $u_n \in]0, \frac{\pi}{0}]$ et $u_{n+1} = \sin u_n \leq u_n$.
   La suite $(u)_{n \geq 0}$ est décroissante minorée par 0 donc converge vers 0, l'unique solution de l'équation $\sin(x) = x$.

Cas particulier

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[a, b]$.

Exemple

$f(x) = \cos(x) - x, I = [0, \pi]$
$f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1 - \pi$
donc $f(0)\ f(\pi) < 0 \Longrightarrow \exists \alpha \in]0, \pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \alpha$.

Corollaire 3.6.1. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

3.6.2 Fonctions continue et strictement monotone.

Théorème 3.6.4. *(**Fondamental**)*
Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1. *f est une bijection de I sur $f(I)$.*
2. *La fonction réciproque f^{-1} est continue, strictement monotone (dans le même sens que f) de $f(I)$ sur I.*
3. *La courbe de f et celle de f^{-1} sont symétrique par rapport à la première bissectrice.*

Propriétés de f^{-1}.
On a :
$\circ\ \forall x \in I, \forall y \in f(I)$

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Si f est strictement croissante alors.
$\circ\ f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
$\circ\ f([a, +\infty[) = [f(a), \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)[$

Exemple : fonction racine $n^{ième}$. Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^n$.
$\circ$ f est continue sur $\mathbb{R}^+$ (polynômiale)
$\circ$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + y^{n-1})$$

donc $x^n < y^n$
Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
et

$$\begin{aligned} f([0, +\infty[) &= [0, \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)[\\ &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

Théorème 3.6.5. *(**Théorème et définition**)*
La fonction $x \longrightarrow x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et sa réciproque s'appelle la fonction racine $n^{ième}$ et on la note $\sqrt[n]{}$.

On a :
$\forall x \in [0,+\infty[$, $\forall y \in [0,+\infty[$

$$\sqrt[n]{x} = y \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

On note aussi : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
Par convention $x^0 = 1$ pour $x > 0$.

• • • • • • • • • •

Chapitre 4

Dérivées - Fonctions usuelles

Contents

4.1 Dérivabilité - Différentiébilité

4.1.1 Dérivée,dérivée à droite,dérivée à gauche

Définition 4.1.1.
• *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $f'(x_0)$. $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0.
• *On dit que f est derivable à droite (resp.à gauche) en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\mathit{resp.} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})$$

existe. On la note note $f'_d(x_0)$ (resp.$f'_g(x_0)$).

Exemples

$\cdot$ $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 \neq 0.$
Cherchons $f'(x_0)$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x x_0} \\
&= \frac{-1}{x_0^2}.
\end{aligned}$$

La fonction : $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée en x_0 est $\frac{-1}{x_0^2}$.

$\cdot$ $f(x) = x^2 + |x|$, $x_0 = 0$
On a :

$$\begin{aligned}
f'_d(0) &= \lim_{x \to 0, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0, x > 0} (x + 1) = 1.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f'_g(0) &= \lim_{x \to 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0, x < 0} (x - 1) = -1
\end{aligned}$$

Proposition 4.1.1. *Pour que f soit dérivable au point x_0 il faut et il suffit que f admette une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point x_0 qui soient égales.*

Théorème 4.1.1. *Si f est dérivable en x_0 , f est continue en x_0*

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists \beta > 0 : |x - x_0| < \beta \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

d'où :

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| |x - x_0| < (\left| f'(x_0) \right| + \varepsilon) |x - x_0|$$

Donc

$$\exists \alpha = \inf(\frac{\varepsilon}{|f'(x_0)| + \varepsilon}, \beta) : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

c'est à dire f est continue en x_0. $\square$

Remarque

La réciproque du théorème est fausse, par exemple : $f(x) = |x|$, f est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Proposition 4.1.2. *(Dérivée d'une fonction composée)*
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Ainsi si $f(x) = (u(x))^n, n \in \mathbb{N}^*$

$$f'(x) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$$

Preuve :

Soit $\beta > 0$.
Comme f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

$$(\exists \alpha > 0) : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta$$

On pose, pour $|h| < \alpha$

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \Longleftrightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

de même, pour $|k| < \beta$

$$g(f(x_0) + k) = g(f(x_0)) + kg'(f(x_0)) + k\varepsilon_1(k)$$

avec

$$\lim_{k \to 0} \varepsilon_1(k) = 0$$

comme par hypothèse, pour $|h| < \alpha$, $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \beta$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h)) &= g(f(x_0)) + (hf'(x_0) + h\varepsilon(h))g'(f(x_0)) + (hf'(x_0) + h\varepsilon(h))\varepsilon_1(hf'(x_0) + h\varepsilon(h)) \\ &= g(f(x_0)) + hf'(x_0)g'(f(x_0) + h\varepsilon(h))g'(f(x_0)) + (hf'(x_0) + h\varepsilon(h))\varepsilon_1(hf'(x_0) + h\varepsilon(h)) \\ &= g(f(x_0)) + hf'(x_0)g'(f(x_0) + h\varepsilon_2(h) \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_2(h) = \varepsilon(h))g'(f(x_0)) + ((f'(x_0) + \varepsilon(h))\varepsilon_1(hf'(x_0) + h\varepsilon(h))$$

et

$$\lim_{h \to 0} \quad \varepsilon_2(h) = 0$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

Application : Si g est dérivable en x_0 et $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et $(\frac{1}{g})'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

En effet :

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $\frac{1}{g} = f \circ g$, d'où :

$$(\frac{1}{g})'(x_0) = f'(g(x_0).g'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Corollaire 4.1.1. *Soit f une fonction derivable. a et b deux constantes réelles, alors la fonction $g : x \longrightarrow f(ax+b)$ est dérivable et on a :*

$$g'(x) = af'(ax+b).$$

Proposition 4.1.3. *Si f est une application continue, strictement monotone sur I, dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$. Alors f est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b)}.$$

Preuve :

Pour $x \neq a$ et $y \neq b$, on a

$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$ avec $x = f^{-1}(y)$

posons $\varphi(x) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varphi(x) = \frac{1}{f'(a)}$

d'autre part f^{-1} étant continue, donc la fonction

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \varphi[f^{-1}(y)]$$

tend vers $\frac{1}{f'[f^{-1}(a)]} = \frac{1}{f'(b)}$ quand x tend vers x_0 □

4.1.2 Différentiabilité en un point.

Définition 4.1.2. *Soit f une fonction définie sur un voisinage centré en x_0. On dit que f est différentiable au point x_0 s'il existe $l \in \mathbf{R}$ et une fonction $\varepsilon : x \longrightarrow \varepsilon(x)$ définie sur un intervalle I de centre 0 telles que :*

$$(\forall h \in I) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\varepsilon(h)$$

avec

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Remarque

$$f \text{ est différentiable en } x_0 \Longleftrightarrow f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } l = f'(x_0)$$

Définition 4.1.3. *L'application, notée df_{x_0}, définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$(\forall h \in I) \qquad df_{x_0}(h) = f'(x_0).h$$

est appelé fonction différentiable de f en x_0.

Interprétation géométrique du nombre dérivé : Soit f une fonction définie sur un intervalle centré en x_0 et C_f sa courbe représentative.

Si f est dérivable en x_0, alors C_f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors C_f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale.

4.1.3 Fonction dérivée-Dérivées successives.

Définition 4.1.4.
• *On dit que f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est dérivable en tout point de I. L'application, notée f', définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f': & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

est appelé fonction dérivée de f.
• *Si f' est elle-même dérivable sur I alors on définit $(f')'$ notée f " applée dérivée seconde de f est ainsi se suite.*
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de f.
Par convention

$$f^{(0)} = f.$$

Définition 4.1.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de* $\mathbf{R}$. *On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si*

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Théorème 4.1.2.
• *Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive.*
• *Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in I$, $F(x) = G(x)+c$*

Définition 4.1.6.
• *Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^n si f existe sur I et y continue. On note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n de I sur $\mathbb{R}$.*
• *Lorsque f est de classe C^n pour tout n, on dit que f est de classe C^∞.*

Théorème 4.1.3. *(* **Formule de** *Leibniz) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $a \in I$ telles que $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent. Alors fg est n fois dérivable en a et*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

4.1.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème 4.1.4. *Si f et g sont dérivables sur un intervalle I, alors $f+g$, fg et λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont dérivables sur I, si de plus $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et on a*

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$(\frac{1}{g})'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$	$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	

Dérivées des fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \lambda$	$f'(x) = 0$
$\mathbf{R}$	$f(x) = x^n \ (n \in N^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$[0, +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \forall x \in]0, +\infty[$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
D_u	$f(x) = u^n(x)$	$f'(x) = nu^{n-1}(x)u'(x)$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = \omega\cos(\omega x + \varphi)$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = -\omega\sin(\omega x + \varphi)$

4.2 Application : Étude des fonctions

4.2.1 Théorème de *Rolle* et formule des accroissements finis

Définition 4.2.1. *On dit que la fonction f définie sur un voisinage de x_0 admet un* ***maximum relatif*** *(resp.* ***minimum relatif*** *) s'il existe un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ sur lequel on a :*

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{ resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

On dit que f admet un ***extremum relatif*** *si et seulement si f admet un maximum relatif ou minimum relatif.*

Proposition 4.2.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. Si f admet un extremum relatif en $c \in I$ et si $f'(c)$ existe alors $f'(c) = 0$.*

Démonstration :

Pour simplifier, supposons que $f(c)$ est un maximum relatif.
Donc il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que :

$$\forall x > c \qquad \text{et} \qquad x \in J \Longrightarrow f(x) \geq f(c)$$

et

$$\forall x < c \qquad \text{et} \qquad x \in J \Longrightarrow f(x) \leq f(c)$$

alors

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{et} \qquad \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

et comme f est dérivable en c alors

$$f'(c) = f'_d(c) = f'_g(c) = 0$$

□

Théorème 4.2.1. *(Théorème de Rolle)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$.*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve :

Si f est constante le résultat est évident.

Sinon, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$, par exemple $f(x_0) > f(a)$.

D'autre part il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. (la continuité de f sur $[a, b]$)

Or

$$f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b),$$

donc $c \in]a, b[$, donc, $f(c)$ étant un extremum de f, on a $f'(c) = 0$. □

Théorème 4.2.2. *(Théorème des accroissements finis)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve :

Posons $A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
et

$$\varphi : [a, b] \to f(x) - A(x - a).$$

On a

$$\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$$

donc d'après le théorème de *Rolle*, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

On en déduit

$$f'(c) = A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

d'où le résultat. $\square$

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
Si

$$f(a) = g(a) \quad et \quad f'(x) \geq g'(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

alors

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

Preuve :

On pose : $h = f - g$

Soit $x > x_0$. h est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur$]x_0, x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]x_0, x[$: $h'(c) = \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

donc $h(x) \geq 0$.

4.2.2 Dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème 4.2.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I*

- ◦ *f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0, \forall x \in I$*
- ◦ *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$*
- ◦ *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$*

4.2.3 Convexité-Concavité-Point d'inflexion.

Définition 4.2.2. *Soit $\wp_f$ le graphe d'une fonction f défine sur un intervalle I. On dit que $\wp_f$ est **convexe** (resp. **concave**), si tout arc $\overset{\frown}{MN}$ de $\wp_f$ est situé au **dessous** (resp. au **dessus**) de la droite (MN).*

*On dit que f admet un point d'inflexion P si $\wp_f$ **change la concavité** de gauche à droite du point P.*

Théorème 4.2.4. *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $\wp_f$ sa courbe représentative.*

◦ Si $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$, alors $\wp_f$ est convexe.

◦ Si $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$, alors $\wp_f$ est concave.

◦ Si $f''(x_0) = 0$ avec changement de signe, alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour $\wp_f$

4.2.4 Étude des branches infinies

Le dessin suivant donne les différents types des branches infinies rencontrées lors d'une étude d'une fonction.

1. $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty} \to \boxed{\text{la droite } x = x_0 \text{ est asymptote verticale}}$

2. $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0} \to \boxed{\text{la droite } y = y_0 \text{ est asymptote horizontale}}$

3. $$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \to \begin{cases} 1)\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty} \to \boxed{\textit{B.p de sens l'axe des ordonnées}} \\ 2)\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0} \to \boxed{\textit{B.p de sens l'axe des abscisses}} \\ 3)\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a (a \neq 0)} \to \begin{cases} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty} \to \boxed{B.p{:}y{=}ax} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b} \to \boxed{A.o{:}y{=}ax{+}b} \end{cases} \end{cases}$$

$B.p$: Branche parabolique.

$A.o$: Asymptote oblique.

4.3 Fonctions usuelles

4.3.1 Fonctions circulaires

La fonction Arcsinus

Définition 4.3.1. *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} \sin : & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longrightarrow & \sin(x) \end{array}$$

est continue (impaire), strictement croissante ; c'est donc une bijection de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1, 1]$.
Par conséquent elle admet une fonction réciproque, appelée ***Arcsinus*** *et notée* arcsin*, on a :*

$$\begin{array}{rccc} \arcsin : & [-1, 1] & \longrightarrow & [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longrightarrow & \arcsin(x) \end{array}$$

Il en résulte que :
· $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$
· $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$
et on a aussi :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \Longleftrightarrow x = \arcsin(y)$$

La courbe de arcsin
Elle s'obtient à partir de celle de sin par symétrie par rapport à la première bissectrice
Limites

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}}{x + 1} = +\infty$$

Dérivabilité

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La fonction Arccosinus

Définition 4.3.2. *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} \cos : & [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longrightarrow & \cos(x) \end{array}$$

est continue (paire), strictement décroissante ; c'est donc une bijection de $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$.
Par conséquent elle admet une fonction réciproque, appelée ***Arccosinus*** *et notée* arccos, *on a :*

$$\begin{array}{rccc} \arccos : & [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ & x & \longrightarrow & \arccos(x) \end{array}$$

Il en résulte que :
· $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = x$
· $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\sin(x)) = x$
et on a aussi :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in [0, \pi] \qquad \cos(x) = y \Longleftrightarrow x = \arccos(y)$$

La courbe de arccos
Elle s'obtient à partir de celle de cos par symétrie par rapport à la première bissectrice
Limites

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{\arccos(x)}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{\arccos(x) - \pi}{x + 1} = -\infty$$

Dérivabilité

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Propriété

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}}$$

La fonction Arctangente

Définition 4.3.3. *La fonction*

$$\begin{array}{cccc} \tan : &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \tan(x) \end{array}$$

est continue (impaire), strictement croissante ; c'est donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *dans* $\mathbb{R}$
Par conséquent elle admet une fonction réciproque, appelée Arctangente et notée arctan, *on a :*

$$\begin{array}{cccc} \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & x & \longrightarrow & \arctan(x) \end{array}$$

Il en résulte que :
· $\forall x \in \mathbf{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$
· $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x$
et on a aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\qquad \tan(x)=y \Longleftrightarrow x=\arctan(y)$$

La courbe de arctan
Elle s'obtient à partir de celle de par symétrie par rapport à la première bissectrice
Limites

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$$

Dérivabilité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

4.3.2 Fonctions logarithmes et exponentielles

Fonctions logarithmes

Exercice : Déterminer toutes les fonctions réelles définiés sur $]0,+\infty[$ vérifiant :

1. $\forall x, y \in]0,+\infty[\;\; f(xy)=f(x)+f(y)$
2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$

Remarque

La fonction nulle vérifie (1) et (2).

Supposons l'existence d'une fonction, non nulle, vérifiant (1) et (2).
∘ On a $f(1) = 0$
∘ Considérons la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = f(xy)$, $y > 0$.

$$\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in]0,+\infty[, \quad g'(y) = xf'(xy) = f'(y)$$

donc pour $y = 1$ on a :$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{f'(1)}{x} = \frac{k}{x}$
∘ $k \neq 0$, car la fonction constante ne vérfié pas (1).
On déduit que f est la primitive de $x \longrightarrow \frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule au point 1.
Réciproquement :
Soit F la primitive de $x \longrightarrow \frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.
On a $F'(x) = \frac{k}{x}$
Montrons que F vérifié :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in]0,+\infty[\quad F(xy) = F(x) + F(y)$$

Posons $h(y) = F(xy)$, alors $h'(y) = \frac{k}{y}$
donc

$$\exists c \in \mathbb{R} : h(y) = F(y) + c \ \forall y \in]0,+\infty[$$

et comme $F(1) = 0$, alors $h(1) = F(x) = c$
d'où

$$F(xy) = f(x) + F(y)$$

Définition 4.3.4. *La fonction primitive de $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, qui s'annule en 1, s'appelle fonction logarithme Népérien, on la note* $\ln$.

Propriétés

∘ La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$
∘ $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
∘ $\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in]0,+\infty[\quad \ln xy = \ln x + \ln y$
$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
∘ $\forall x \in]0,+\infty[, \forall r \in \mathbb{Q} \quad \ln x^r = r\ln x$
Limites
∘ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
∘ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\left(\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1\right)$
Dérivabilité
∘ La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[\quad \ln' x = \frac{1}{x}$
∘ Si $f(x) = \ln|u(x)|$; u dérivable et ne s'annule pas alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
Courbe
∘ ln est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$
∘ $y = x - 1$ est l'équation de la tangente en 1.

Fonctions exponentielles

Définition 4.3.5. *La fonction* $x \longrightarrow \ln x$ *est une bijection de* $]0, +\infty[$ *dans* $\mathbf{R}$*. Sa fonction réciproque est appelée fonction exponontielle, notée* $\exp x$ *ou* e^x*.*

Propriétés

$\cdot\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
$\cdot\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$
$\cdot\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln x} = x$
$\cdot\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*\ , e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y$
$\cdot\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\quad e^{x+y} = e^x e^y$
$\cdot \forall r \in \mathbb{Q} \quad e^{rx} = (e^x)^r$

Limites

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in R, (e^x)' = e^x$
Si $f(x) = e^{u(x)}$ avec u dérivable alors $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition 4.3.6. *On appelle fonction puissance* α *la fonction notée* x^α *; définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Quelques limites
$\cdot\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \alpha > 0$
$\cdot\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$
$\cdot\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \alpha > 0$

3.2.3 Fonctions logarithmes de base 10

Définition 4.3.7. *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$*. La fonction* $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ *s'appelle fonction logarithme de base* a*.*

Cas particulier Si $a = 10$ on dit logarithme décimal et on note $\log$.

Remarque

Les propriétés et l'étude de $\log_a$ se déduisent de celle de $\ln$ car : $\forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{1}{\ln a} . \ln x$

●●●●●●●●●●●

Chapitre 5

Polynômes à coefficients réels ou complexes

Contents

$\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

5.1 Définitions et propriétés générales

Définition 5.1.1. · *Nous appelons* ***fonction polynôme*** *ou simplement* ***polynôme*** *toute fonction de la forme :*

$$P : x \longrightarrow a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \Bbbk$ *appelés les coefficients du polynôme* P.

· Si $a_n \neq 0$, n est appelé le **degré** du polynôme P et on écrit $\deg P = n$.
· Le polynôme nul n'a pas de degré.
· Le terme $a_i x^i$ est appelé le **monôme** de degré i.
· On note l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\Bbbk$ par $\Bbbk$**[X]** et l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\Bbbk$, de degré au plus n par $\Bbbk_n$**[X].**

5.2 Racines d'un polynôme

Définition 5.2.1. *Nous appelons* ***zéro*** *ou* ***racine*** *d'un polynôme* P *toute solution de l'équation* $P(x) = 0$.

Proposition 5.2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un singleton et P et Q des polynômes. Si $P(x) = Q(x)$, $\forall x \in I$ alors $P = Q$.*

Démonstration :

On pose $R = P - Q$, supposons que $R \neq 0$, donc R est une fonction polynômiale de degré n, soit a_n son coefficient dominant, $a_n \neq 0$, donc $\forall x \in I$, $R^{(n+1)}(x) = a_n = 0$, ceci est absurde, donc $R = 0$, d'où $P = Q$. $\square$

Théorème 5.2.1. *Si P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{k}$. Alors il existe un polynôme Q et une constante $r \in \mathbb{k}$ tels que :*

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r$$

*de plus Q et r sont uniques. Q est appelé le **quotient** de la division de P par $x - \alpha$ et r le **reste**.*

Démonstration :

On pose $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $n = \deg P$
Calculons le rapport : $\frac{P(x)-P(\alpha)}{x-\alpha}$

$$\begin{aligned}
\frac{P(x) - P(\alpha)}{x - \alpha} &= \frac{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) - (a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0)}{x - \alpha} \\
&= a_n \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} + a_{n-1}\frac{x^{n-1} - \alpha^{n-1}}{x - \alpha} + ... + a_1 \frac{x - \alpha}{x - \alpha} \\
&= a_n Q_{n-1} + a_{n-1}Q_{n-2} + ... + a_1 Q_0
\end{aligned}$$

avec

$$Q_i = x^i + \alpha x^{i-1} + ... + \alpha^{i-1}x + \alpha^i \ ,i = 1, 2, ..., n-1 \text{ et } Q_0 = 1$$

donc

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r$$

avec

$$Q(x) = a_n Q_{n-1} + a_{n-1}Q_{n-2} + ... + a_1 Q_0 \ \text{ et } r = P(\alpha).$$

$\deg Q = \deg P - 1 = n - 1.$ $\square$

Corollaire 5.2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $P(\alpha) = 0$
(ii) Il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
*Dans ce cas on dit que $x - \alpha$ **divise** P ou bien P est **divisible** par $x - \alpha$.*

Exemple

Soit $P = x^{2n} - 2x + 1, n \in \mathbb{N}^*$
On a $P(1) = 0$, donc $x - 1$ divse P

Exercice :

Calculer le polynôme Q, le quotient de la division de $P = x^{2n} - 2x + 1$ par $x - 1$.

5.3 Décomposition d'un polynôme

5.3.1 L'ordre de multiplicité d'une racine

Définition 5.3.1. *On dit que le polynôme Q divise le polynôme P s'il existe un polynôme R tel que $P = QR$.*

Théorème 5.3.1. *(**Théorème et définition**) Soit $P \in \Bbbk[\mathbf{X}]$, $\alpha \in \Bbbk$ et $k \in \mathbf{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$ et $Q(\alpha) \neq 0$

(ii) $(x-\alpha)^k$ divise P et $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

*Dans ce cas où les assertions sont vraies, on dit que α est une racine d'**ordre** k ou k est l'**ordre de multiplicité** de la racine α.*

Démonstration :

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Il existe un polynôme S tel que :

$$Q = (x-\alpha)S + Q(\alpha)$$

donc

$$Q(x-\alpha)^k = (x-\alpha)^{k+1}S + Q(\alpha)(x-\alpha)^k$$

et

$$\begin{aligned} P &= (x-\alpha)^{k+1}S + Q(\alpha)(x-\alpha)^k \\ &= (x-\alpha)^k[(x-\alpha)S + Q(\alpha)] \end{aligned}$$

il est clair que $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Soit Q tel que $P = (x-\alpha)^k Q$. Puisque $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P, $x - \alpha$ ne divise pas Q, donc $Q(\alpha) \neq 0$. □

Exemples

· $P = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbf{C},\ a \neq 0)$

P admet une racine double (d'ordre 2) si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$.

· Les racines de $x^2 + x + 1$ sont toutes simples, c'est-à-dire d'ordre 1.

· $P = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

La racine 1 est d'ordre 2 et la racine -3 est simple.

Proposition 5.3.1. *Soit $P \in \Bbbk[\mathbb{X}]$, $\alpha \in \Bbbk$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour que α soit une racine de P, d'ordre k, il faut et il suffit que :*

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = ...P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad et \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

Démonstration :

Soit P un polynôme de degré n. Démontrons qu'il existe des scalaires $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ tels que :

$$P(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + ... + a_k(x-\alpha)^k + ... + a_n(x-\alpha)^n$$

$$\forall k = 0,1,...,n, \quad P^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)![a_{k+1}(x-\alpha) + ... + \frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-\alpha)^{n-k}]$$

alors

$$a_k = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}, k = 0,1,...,n$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(x) &= P(\alpha) + (x-\alpha)\frac{P'(\alpha)}{1!} + ... + (x-\alpha)^k\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} + ... + (x-\alpha)^n\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} \\ &= (x-\alpha)^k[\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} + ... + (x-\alpha)^{n-k}\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}] + [P(\alpha) + (x-\alpha)\frac{P'(\alpha)}{1!} + ... + (x-\alpha)^{k-1}\frac{P^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}] \\ &= (x-\alpha)^k Q(x) + R(x) \end{aligned}$$

avec

$$Q(x) = [\tfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} + ... + (x-\alpha)^{n-k}\tfrac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}]$$

et

$$R(x) = [P(\alpha) + (x-\alpha)\tfrac{P'(\alpha)}{1!} + ... + (x-\alpha)^{k-1}\tfrac{P^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}]$$

donc $(x-\alpha)^k$ divise P et $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P si et seulement si $R = 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$ c'est-à-dire si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ □

Exemple

Soit $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$
$P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$ et $P^{(3)}(2) \neq 0$
donc 2 est une racine d'ordre 3.

5.3.2 Décomposition d'un polynôme

Théorème 5.3.2. ***(Théorème de D'ALEMBERT) (admis)***
Tout polynôme, à coefficients complexes, admis une racine dans $\mathbf{C}$*, on dit que le corps* $\mathbf{C}$ *est* ***algébriquement clos.***

Corollaire 5.3.1. ***(Décomposition dans*** $\mathbb{C}[X]$***)***
Soit $P \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$ *de degré* n, $n \in \mathbf{N}^*$. *Alors il existe des scalaires* $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r$ *distincts, des entiers* $k_0, k_1, ..., k_r$ *et* $a \in \mathbf{C}^*$ *tels que :*

$$P = a(x-\alpha_0)^{k_0}(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_r)^{k_r}$$

Démonstration :

Soit $P = ax + b$ un polynôme de degré 1, alors $P = a(x - \alpha)$, avec $\alpha = \frac{-b}{a}$, donc la propriété est vrai pour les polynômes de degré 1.

Supposons maintenant le résultat vrai pour tous les polynômes de degrés $1, 2, ..., n$ et montrons le pour les polynômes de degré $n + 1$.

Soit P un polynôme de degré $n+1$,d'après le théorème de $D'ALEMBERT$, P admet une racine α_0 d'ordre k_0, donc il existe un polynôme Q tel que :

$$P = (x - \alpha_0)^{k_0} Q$$

$\deg Q \leq n$, d'après l'hypothése de recurrence, il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ et des entiers $k_1, k_2, .., k_r$ tels que :

$$Q = a(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x - \alpha_r)^{k_r}$$

donc

$$P = a(x - \alpha_0)^{k_0}(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x - \alpha_r)^{k_r}$$

d'où le résultat. □

Remarque,

$$\deg P = k_0 + k_1 + k_2 + ... + k_r = n$$

Lemme 5.3.1. *Soit P un polynôme à coefficients réels, si z est une racine de P, alors $\bar{z}$ est aussi une racine de P.*

Preuve :

Soit $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ à coefficients réels.

On a, $\forall z \in \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff \overline{P(z)} = 0 \\ &\iff \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = 0 \\ &\iff a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + ... + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &\iff P(\overline{z}) = 0 \end{aligned}$$

□

Remarque

z et $\overline{z}$ ont le même ordre de multiplicité.

Corollaire 5.3.2. *(**Décomposition dans** $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$)*
Tout polynôme à coefficients r2els, de degré n, $n \in \mathbf{N}^*$ se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$P = a \prod_{i=1}^{i=r} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{j=p} (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{l_j}, \quad a \in \mathbb{R}$$

avec les α_i les racines réelles distinctes de P, les β_j, γ_j des réels tels que $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$, et les k_i, l_j des entiers

Preuve :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, P se décompose, dans $\mathbb{C}[X]$, d'une manière unique sous la forme :

$$P = a \prod_{i=1}^{i=r} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{j=p} (x - a_j)^{l_j} \prod_{j=1}^{j=p} (x - \bar{a}_j)^{l_j}$$

(les α_i désignent les racines réelles de P et $a_j, \bar{a}_j$ les racines complexes de P)

$$\begin{aligned} P &= a \prod_{i=1}^{i=r} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{j=p} (x^2 - 2Re(a_j)x + |a_j|^2)^{l_j} \\ &= a \prod_{i=1}^{i=r} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{j=p} (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{l_j} \end{aligned}$$

avec

$$\forall j = 1, 2, ..., p \qquad \beta j = 2Re(a_j),\ \gamma_j = |a_j|^2,\ \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$$

□

Remarques

· On peut avoir $r = 0$ ou $p = 0$.
· $\deg P = k_1 + k_2 + ... + k_r + 2(l_1 + l_2 + ... + l_p) = n$

On en déduit facilement le corollaire suivant :

Corollaire 5.3.3. *Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{k}$, de degré n, admet au plus n racines.*

Corollaire 5.3.4. *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{k}[\mathbf{X}]$, de degrés n, s'ils prennent les mêmes valeurs en $n+1$ points ; deux à deux distincts de $\mathbb{k}$ alors $P = Q$.*

Preuve :

On pose $R = P - Q$

R est un polynôme de degré au plus n et admet $n+1$ racines distinctes, donc R ne peut être que le polynôme nul. □

5.3.3 Relations entre les coefficients et les racines dans les polynômes de degrés 2 et 3.

Polynôme de degré 2 : Soit $P = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). x_1 et x_2 ces deux racines.

On pose $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1 x_2$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} P &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - asx + ap \end{aligned}$$

D'où :

$$s = \frac{-b}{a} \text{ et } p = \frac{c}{a}.$$

Application : Résoudre dans $\mathbf{R}^2$, les systèmes d'équations :

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ 6xy = 1 \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{c} xy^2 + yx^2 = 17710 \\ xy = 385 \end{array} \right. \qquad (3) \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y - xy = 5 \end{array} \right.$$

Polynôme de degré 3 : Soit $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré 3 ($a \neq 0$). x_1, x_2, x_2 ces trois racines, distinctes ou non.

Posons :

$$\begin{array}{l} s = x_1 + x_2 + x_3 \\ p = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ q = x_1x_2x_3 \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} P & = & a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2) \\ & = & ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a(x_1x_2x_3) \\ & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \end{array}$$

donc

$$s = \frac{-b}{a}, \quad p = \frac{c}{a}, \quad q = \frac{-d}{a}$$

Application : Résoudre donc $\mathbf{C}^3$, le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = 0 \\ xyz = 1 \end{array} \right.$$

x, y, z sont les racines de l'équation : $t^3 - 1 = 0$
d'où :

$$S = \{(1, j, \bar{j}), (1, \bar{j}, j), (j, \bar{j}, 1), (\bar{j}, j, 1), (j, 1, \bar{j}), (\bar{j}, 1, j)\}$$

avec

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice résolu :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 3x = \frac{1}{2}$
   En exprimant $\cos 3x$ en fonction de $X = \cos x$, en déduire que les nombres

$$X_1 = \cos\frac{\pi}{9}, \quad X_2 = \cos\frac{7\pi}{9}, \quad X_3 = \cos\frac{13\pi}{9}$$

   sont des solutions de l'équation : $8X^3 - 6X - 1 = 0$ et que, pour tout X réel, on a :

$$(3)\ 8X^3 - 6X - 1 = 8(X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)$$

2. Al'aide de l'égalité (3) et en développant le deuxième membre, déduire les valeurs numériques de :

$$A = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$$
$$B = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$
$$C = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$$

Solution :

1. $\cos 3x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - \cos x \end{aligned}$$

Posons $X = \cos x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ \cos 3x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 4\cos^3 x - \cos x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 8X^3 - 6X - 1 = 0$$

donc x est une racine de (1) si et seulement si X est une racine de (2)
d'où les racines de (2)

$$X_1 = \cos\frac{\pi}{9}\ (k=0), \quad X_2 = \cos\frac{7\pi}{9}\ (k=1), \quad X_3 = \cos\frac{13\pi}{9}\ (k=2)$$

ceci entraîne :

$$(3) \quad 8X^3 - 6X - 1 = 8(X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)$$

2. Par identification des coefficients dans l'égalité (3) on trouve :

$$A = 0, \quad B = -\frac{3}{4} \text{ et } C = \frac{1}{8}.$$

●●●●●●●●●●●

Chapitre 6

Développements limités

Contents

Soit f une fonction numérique. Nous avons vu que f est différentiable en un point a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a et une application ε définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, pour laquelle, pour tout $x, a + x \in V(a)$,

$$f(a + x) = f(a) + xf'(a) + x\varepsilon(x).$$

Donc la différentiabilité de f peut être vu comme le fait d'approcher une fonction en un point par une fonction polynôme $(x \longrightarrow f(a) + xf'(a))$.

Un développement limité est donc une généralisation de la différentiabilité : On cherche à approcher f par une fonction polynôme.

6.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Rappel

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, une partie V de $\mathbb{R}$ est *un voisinage* de x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert I tel que $x_0 \in I \subset V$.

Définition 6.1.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D, contient x_0, mais pas en x_0.*
• *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ I \text{ intervalle ouvert contient } x_0 \text{ tel que } : \forall x \in I \cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$

on note alors $f(x) =_{x \to x_0} o(g(x))$.
• *On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si $f(x) - g(x) =_{x \to x_0} o(g(x))$ et on écrit alors $f(x) \sim_{x \to x_0} g(x)$ ou $f \sim_{x_0} g$*

Remarques

- Si $f(x) =_{x \to x_0} o(g(x))$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, sauf peut être en x_0, alors :
$$f(x) \sim_{x \to x_0} g(x) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
- $f(x) =_{x \to x_0} o(1) \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Exemples

· $\sin(x) \sim_{x \to 0} x$, car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
· $1 - \cos(x) \sim_{x \to 0} \frac{x^2}{2}$, car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 1.$

Définition 6.1.2. *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$*
· *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de $+\infty$ si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \forall\ x \geq A \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$
on note alors $f(x) =_{x \to +\infty} o(g(x))$.
· *On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si $f(x) - g(x) =_{x \to +\infty} o(g(x))$ et on écrit alors $f(x) \sim_{x \to +\infty} g(x)$*

Exemples

1) $x + 2 \sim_{x \to +\infty} x - 1$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, donc $e^x =_{x \longrightarrow -\infty} o(\frac{1}{x})$
3) $\ln x =_{x \longrightarrow 0} o(\frac{1}{x})$

Remarque

La relation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition c'est-à-dire si $f_1 \sim_{x \to x_0} g_1$ et $f_2 \sim_{x \to x_0} g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim_{x \to x_0} g_1 + g_2$ comme la montre l'exemple suivant :
on a
$$x + 2 \sim_{x \to +\infty} x + 1 \quad \text{et} \quad -x \sim_{x \to +\infty} -x \quad \text{mais} \quad 2 \nsim_{x \to +\infty} 1$$
ce pendant on a le résultat suivant :
Si $f_1 \sim_{x \to x_0} g_1$ et $f_2 \sim_{x \to x_0} g_2$ alors $f_1 f_2 \sim_{x \to x_0} g_1 g_2$ et si $f \sim_{x \to x_0} g$ alors $f^n \sim_{x \to x_0} g^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$

6.2 Développements limités

6.2.1 Développements limités au voisinage de 0

Dans la suite de cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

Définition 6.2.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ un application, et supposons $0 \in I$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Le polynôme $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ s'appelle la partie régulière du D.L

Exemples

$\cdot$ $\sin(x) = x + o(x)$
$\cdot$ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$
$\cdot$ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x} = 0 \Longrightarrow \ln(1+x) = x + o(x)$

Propriétés et remarques

• Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, il est unique.

• Si f admet un D.L d'ordre n, alors il existe un polynôme $P_n(x)$ et une application ε définie sur un voisinage de 0 telle que :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

donc

$$f(x) - P_n(x) =_{x \longrightarrow 0} o(x^n)$$

• L'ordre du D.L est l'entier n sur $o(x^n)$, et non le degré du polynôme P_n.

• Une fonction admet un D.L d'ordre 0 au voisinage de 0 si et seulement si elle continue en 0. Dans ce cas :

$$f(x) = f(0) + o(1)$$

• Une fonction admet un D.L d'ordre 1 au voisinage de 0 si et seulement si elle dérivable en 0.

• Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0, alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

• Si une fonction admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 alors pour tout entier m tel que $m \leq n$, cette fonction admet un D.L d'ordre m au voisinage de 0, en effet si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

alors

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m + o(x^m)$$

6.2.2 Développements limités au voisinage de $a \neq 0$

Définition 6.2.2. *Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$. On dit f admet un D.L au voisinage de a si et seulement si la fonction*

$$g : t \longrightarrow f(a+t)$$

admet un D.L au voisinage de 0.

Exemple $f(t) = \frac{1}{t}$ et $a = 1$

On a au voisinage de 0 :

$$f(1+u) = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

d'où au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t} = t - (t-1) + (t-1)^2 + o((t-1)^2).$$

6.2.3 Développements limités au voisinage de ∞

Définition 6.2.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp.$]-\infty, a[$). On dit que f admet un D.L au voisinage de $+\infty$ (resp.$-\infty$) si et seulement la fonction*

$$g : t \longrightarrow f(\frac{1}{t})$$

admet un D.L au voisinage de 0

Exemple Au voisinage de ∞, on a :

$$\frac{1}{t-1} = \frac{\frac{1}{t}}{1 - \frac{1}{t}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})$$

6.3 Calcul des développements limités

Théorème 6.3.1. *(**Formule de Taylor-Lagrange**)*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur $[a,b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration :

Considérons l'application :

$$\begin{array}{llll} \phi : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(b) - f(x) + (b-x)f'(x) + ... + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

la constante A étant choisie telle que $\phi(a) = \phi(b) = 0$.
Cette application est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et

$$\forall x \in]a, b[, \phi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + A\frac{(b-x)^n}{n!}$$

donc d'après le théorème de *Rolle*, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$,
c'est à dire

$$A = f'^{(n+1)}(c).$$

□

Remarque

· Si $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.
· Si $0 \in I$, on a sous les mêmes hypothèses :
$\forall x \in I, \exists \theta \in]0, 1[: \ f(x) = f(0) + xf'(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$.
sous cette forme, cette relation s'appelle formule de *Maclaurin* avec reste de *Lagrange*

Corollaire 6.3.1. *Si $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction n fois dérivable en 0, alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant :*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

Exemples

· $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$
· $g(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$
· $h(x) = \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

Corollaire 6.3.2. *(**Formule de Taylor-Young**) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^{n-1}. Soit $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \longrightarrow 0$ on a*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n)$$

6.4 Opérations sur les développements limités

Proposition 6.4.1. *Soient f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad et \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

où P_n et Q_n sont deux fonctions polynômiales de dgré $\leq n$. Alors

- *la somme $f+g$ admet un développements limité d'ordre n donné par :*

$$(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

- *$\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n donné par :*

$$((\lambda f + \mu g)(x) = \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + o(x^n)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- *Le produit fg admet un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est obtenue en ne gardant que les termes $\leq n$ dans le produit P_nQ_n.*

Théorème 6.4.1. *Soient f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad et \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

où P_n et Q_n sont deux fonctions polynômiale de dgré $\leq n$.
Si $f(0) = 0$, la fonction $g \circ f$ admet le même développement limité d'ordre n que le polynôme $Q_n \circ P_n$; on obtient donc ce développement en ne conservant, dans $Q_n \circ P_n$, que les termes d'ordre $\leq n$.

Exemples

- Développement de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0

On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\begin{aligned} \ln^2(1+x) &= [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)]^2 \\ &= x^2 - x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

- Développement de $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x)$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= [x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)] \\ &= x^2 + o(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= [x^2 + o(x^3)][x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)] \\ &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

d'où :
$e^{\sin(x)} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 0(x^3)$

- Développement de $(1+x)^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0

$(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$

On a :

$$x\ln(1+x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{et} \quad [x\ln(1+x)]^2 = x^4 + o(x^4)$$

d'où :

$$(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

Proposition 6.4.2. *On suppose f dérivable au voisinage de 0, avec f ' admettant un D.L donné par :*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

alors f admet un D.L d'ordre $n+1$ donné par :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple On a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ et $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$
alors $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

6.5 Développements limités usuels au voisinage de 0

La formule de $Taylor - Young$ permet d'obtenir facilement les développements limités suivants, lorsque $x \longrightarrow 0$.

· $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
· $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$
· $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
· $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
· $\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
· $\ln(1-x) = -x - \frac{x}{2} - ... - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
· $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
· $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2.4}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1.3....(2n-3)}{2.4....(2n)}x^n + o(x^n)$
· $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2.4}x^2 + ... - \frac{1.3....(2n-3)}{2.4....(2n)}x^n + o(x^n)$
· $\forall \alpha \in \mathbf{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

6.6 Exemples d'utilisation de développement limité

6.6.1 Calcul de limites

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0}[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}]$

On a : $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{(\sin x - x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \backsim \frac{\frac{x^3}{6}.2x}{x^4}$
d'où :

$$\lim_{x \longrightarrow 0}[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}.2x}{x^4} = \frac{-1}{3}$$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$

On a : $e^{\sin x} - e^{\tan x} = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$ et $\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$
d'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = 1$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

Posons $y = \arccos(1-x)$.

On a $1 - x = \cos y$, donc $x = 1 - \cos y, = 2\sin^2(\frac{y}{2})$, d'où $\sin(\frac{y}{2}) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ et finalement $y = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} \backsim 2\sqrt{\frac{x}{2}} = 2\sqrt{x}$

donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$.

6.6.2 Calcul des valeurs approchées

- On a $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

Le nombre $1+2x$ est une valeur approchée par $défaut$ de $(1+x)^2$, l'incertitude est x^2.
Si $|x| \leq 10^{-1}$ l'incertitude est inférieure à 10^{-2}. Nous écrivons donc

$$(1+x)^2 \backsimeq 1 + 2x.$$

- On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ et $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

Le nombre $1 + \frac{x}{2}$ est une valeur approchée par *excès* de $\sqrt{1+x}$.
Donc

$$\sqrt{1+x} \backsimeq 1 + \frac{x}{2}$$

De même on a, pour x trés petit :

$$\frac{1}{1+x} \backsimeq 1 - x, \qquad \frac{1}{(1+x)^2} \backsimeq 1 - 2x, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \backsimeq 1 - \frac{x}{2}$$

Exemples

- $1,01^2 = 1 + \frac{1}{100} \backsimeq 1.02$
- $\sqrt{97} = \sqrt{100-3} = 10\sqrt{1 - .3.10^{-2}} \backsimeq 10(1 - 1,5.10^{-2}) = 10 - 0,15 = 9,85$
- $\frac{1}{\sqrt{10016}} = \frac{1}{10\sqrt{1+16.10^{-4}}} \backsimeq 10^{-2}(1 - 8.10^{-4}) = 10^{-2} - 8.10^{-6} = 0,009992.$

●●●●●●●●●●●●