ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP, comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications **continues** de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et E_2 le sous ensemble de E formé des applications **de carrés intégrables sur** $\mathbb{R}^+$.

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et } \forall\, x > 0,\ \psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt.$$

Si Φ est un endomorphisme de E, on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de Φ s'il existe $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$; dans ce cas, on dit que f est un vecteur propre de Φ associé à λ et $\mathrm{Ker}\,(\Phi - \lambda id_E)$ s'appelle alors le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.

Première partie

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

   1-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Dans la suite, on pose $\quad I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt.$

   1-2. Montrer que $I(a,b) = -I(b,a)$ et que $I(a,b) = I(1, b/a)$.

   1-3. On note φ l'application définie, pour tout $x \geqslant 1$, par $\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt.$

   1-3-1. Montrer que φ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

   1-3-2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \geqslant 1$.

   1-3-3. Que vaut alors $\varphi(x)$ pour $x \geqslant 1$?

   1-4. En déduire soigneusement la valeur de l'intégrale $I(a,b)$ en fonction de a et b.

2. 2-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

   2-2. Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

   2-3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

   2-4. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt = \frac{\pi^2}{12}$.

Deuxième partie

1. Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

1-1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E.

1-2. On suppose que la fonction f tend vers une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$; montrer qu'il en est de même de la fonction $\psi(f)$. Étudier la réciproque.

1-3. Que peut-on dire dans le cas où cette limite est égale à $+\infty$?

1-4. On pose $h(x) = xf(x), \quad x \geqslant 0$.

1-4-1. Montrer que $\quad g - \psi(g) = \psi(h)$.

1-4-2. En déduire que si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\psi(h)$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Étudier la réciproque.

1-5. Montrer que si f est positive alors, $0 \leqslant \psi(\sqrt{f}) \leqslant \sqrt{\psi(f)}$; dans quel cas y'a t-il égalité ?

2. 2-1. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2-2. Montrer que ψ est injectif.

2-3. L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?

3. Soit λ un réel non nul.

3-1. Déterminer les applications f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall\, x > 0, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

3-2. Pour quelles valeurs du réel λ ces fonctions sont-elles prolongeables à droite en 0 ?

4. 4-1. Est-ce que 0 est valeur propre de ψ ?

4-2. Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre μ alors f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

4-3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ψ et préciser pour chacune d'elles le sous-espace propre associé.

Troisième partie

1. 1-1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2, leur produit fg est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1-2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

1-3. Montrer que l'application $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur E_2.

Dans la suite, ce produit scalaire se notera $(.|.)$ et $\|.\|$ désignera la norme associée.

2. Soit f un élément de E_2 ; on note toujours g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

2-1. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t}$.

2-2. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}\, dt = -b\psi(f)^2(b) + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)\, dt. \tag{1}$$

2-3. En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt \leqslant 2\left(\int_0^b f^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2-4. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leqslant 2\|f\|$.

2-5. On note ψ_2 l'endomorphisme induit par ψ sur E_2. Que peut-on alors dire de ψ_2 en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel normé $(E_2, \|.\|)$?

3. Soit f un élément de E_2.

3-1. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \longmapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3-2. Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

4. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$ et montrer que f est la fonction nulle.

Quatrième partie

1. On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = e^{-ax},\ x \geqslant 0$.

1-1. Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

1-2. Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\dfrac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \geqslant 0$.

2-1. Calculer $\psi(f)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

2-2. Vérifier que $f \in E_2$ et montrer que $(f|\psi(f)) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right) dt$.

2-3. Trouver une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$ puis calculer $\dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$.

3. Montrer plus généralement que si $f \in E_2$ est positive, décroissante et non nulle, alors

$$\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} > \sqrt{2}.$$

4. 4-1. Montrer que l'application $f \longmapsto \dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue sur $E_2 \setminus \{0\}$.

4-2. En déduire que $\left\{\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\ ;\ f \in E_2 \setminus \{0\}\right\}$ est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5. Dans cette question, on va montrer ces deux ensembles coïncident.

   5-1. Pour tout $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$ on note f_s la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

   $$f_s(0) = 0,\ f_s(t) = t^s \quad \text{si } t \geqslant 1\ ,\ \text{et } f_s \text{ affine sur } [0,1].$$

   5-1-1. Vérifier que $f_s \in E_2$ et calculer $\|f_s\|^2$ en fonction de s puis en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-2. Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ en fonction de s et en donner un un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-3. En déduire que la borne supérieure de l'ensemble $\left\{\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\ ;\ \ f \in E_2 \setminus \{0\}\right\}$ vaut 2.

   5-2. Soit $\alpha > 0$; on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

   $$f(t) = t^\alpha \quad \text{si } t \in [0,1],\ \text{ et } f(t) = t^{-\alpha-1} \quad \text{si } t \in [1, +\infty[.$$

   5-2-1. Vérifier que $f \in E_2$ et calculer $\|f\|^2$ en fonction de α.

   5-2-2. Calculer $\|\psi(f)\|^2$ en fonction de α et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

   5-2-3. En déduire que la borne inférieure de l'ensemble $\left\{\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\ ;\ \ f \in E_2 \setminus \{0\}\right\}$ est nulle.

FIN DE L'ÉPREUVE