Concours Centrale-Supélec 2001 MP - Sujet 1 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart et est disponible à l'adresse suivante : http://mathweb.free.fr
Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : polynômes, racines, convergence dominée, équirépartition, formule de Taylor, développement en série entière, homéomorphisme, série de Fourier

Commentaires : Ce problème a l'avantage d'expliquer clairement ce qu'il cherche à démontrer. Il est difficile, et exploite une grosse partie du programme d'analyse de spé, ainsi que des techniques de majoration fines. Surtout, on peut se sentir parfois démuni en abordant certaines questions, dont on ne sait par quel bout les aborder. A affronter sans limite de temps!

Première Partie

I.A. Ca commence plutôt doucement! On a :

$$\begin{aligned}\zeta = ze^{-z} &= \rho e^{i\theta} e^{-\rho\cos\theta - i\rho\sin\theta}\\ &= \rho e^{-\rho\cos\theta} e^{i(\theta-\rho\sin\theta)}\end{aligned}$$

I.B. u est dérivable sur $]0,1[$, et pour tout t de $]0,1[$, on a :

$$u'(t) = \frac{-\ln t}{t^2} > 0.$$

En outre, $u(1) = 1$, tandis que $\lim_0 u = -\infty$. u est donc une fonction continue strictement croissante, qui réalise un homéomorphisme de $]0,1]$ sur son image $]-\infty,1]$. Comme en outre u est C^1 sur $]0,1[$, sa réciproque est aussi C^1 sur $]-\infty,1[$.

I.C. Voici l'exemple d'une question qui peut nous laisser démunis quelques minutes... ou quelques heures! Comment peut-on démarrer? Commençons par une analyse de la situation : si une telle fonction r existe, appliquons lui u. Alors :

$$u(r(\theta)) = \frac{1+\ln(r(\theta))}{r(\theta)}.$$

Mais d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par r, on sait que $\ln(r(\theta)) = r(\theta)\cos(\theta) - 1$. D'où :

$$u(r(\theta)) = \frac{1 + r(\theta)\cos\theta - 1}{r(\theta)} = \cos\theta.$$

Nous pouvons passer à la synthèse. Pour θ réel, nous posons $r(\theta) = u^{-1}(\cos\theta)$, qui définit bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans $]0,1]$. En particulier,

$$\frac{1+\ln(r(\theta))}{r(\theta)} = \cos\theta,$$

ce qui donne encore $\ln r(\theta) - r(\theta)\cos(\theta) = -1$, et le passage à l'exponentielle achève de prouver que r vérifie la relation demandée.

I.D. Nous savons que :

$$r(0)e^{-r(0)} = e^{-1},$$

et donc $r(0) = 1$. De même, on trouve $r(\pi/2) = e^{-1}$. Pour calculer $r(\pi)$, on doit résoudre l'équation $re^r = e^{-1}$. La fonction $f\ :\ x \mapsto xe^x$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, et donc il existe un, et un seul x, pour lequel $f(x) = e^{-1}$. On en trouve une valeur approchée par dichotomie : on a $f(0.278464) \simeq -5.8.10^{-8} < 0$, tandis que $f(0.278465) \simeq 7.7.10^{-7} > 0$. 0.278464 est donc une valeur approchée par défaut à 10^{-6} près de $r(\pi)$.

I.E. r est continue comme composée de fonctions continues, paire et $2\pi-$ périodique car le cos l'est. En outre, si $\theta \in]0,2\pi[$, alors $\cos\theta \in [-1,1[$, et comme $\theta \mapsto \cos\theta$ est C^1 sur $]0,2\pi[$, et $x \mapsto u^{-1}(x)$ est C^1 sur $]-\infty,1[$, on en déduit que r est C^1 sur $]0,2\pi[$. Pour exprimer la dérivée de r, nous dérivons l'égalité vérifiée par r. On trouve :

$$\frac{dr}{d\theta}e^{-r(\theta)\cos(\theta)} + \frac{d}{d\theta}(-r(\theta)\cos(\theta))r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta} = 0.$$

Nous simplifions par $e^{-r(\theta)\cos\theta}$ et réaménageons les termes pour obtenir le résultat demandé.

I.F. Nous écrivons :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1+\ln(1-h)}{1-h} &= 1 - \frac{1-h-h^2/2+o(h^2)}{1-h} \\ &= \frac{h^2/2+o(h^2)}{1-h} \end{aligned}$$

d'où on trouve que $v(h) \sim_{0^+} \frac{h^2}{2}$. Suivant l'indication de l'énoncé, nous écrivons que $1-\cos\theta = 1-u(r(\theta))$,. Comme r est continu, que $r(0) = 1$, si θ tend vers 0 par valeurs supérieures, alors $r(\theta)$ s'écrit $r(\theta) = 1-h(\theta)$, où $h(\theta)$ tend vers 0 par valeurs supérieures. Maintenant, nous savons que $1-\cos\theta \sim \frac{\theta^2}{2}$, et par le calcul précédent, $1-u(1-h(\theta)) \sim \frac{h^2(\theta)}{2}$. La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence, on trouve que $h^2(\theta) \sim \theta^2$. Comme tout est positif, en retraduisant la relation $\sim$ par le quotient tend vers 1, on voit qu'en fait $h(\theta) \sim \theta$. Cela se retraduit en $r(\theta) = 1-\theta+o(\theta)$.

Prouvons finalement que r est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$:

- r est C^1 sur $]0,2\pi[$, et 2π-périodique.
- r est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, puisque continue.
- D'après le développement limité effectué auparavant, r admet une dérivée à droite en 0, qui vaut -1.
- Un travail similaire prouve que r admet une dérivée à gauche en 2π qui vaut 1.

Tout cela signifie exactement que r est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

I.G. Nous vous laissons le soin de dessiner sommairement la courbe. Remarquons simplement que si l'on applique la transformation $z \mapsto ze^{-z}$, d'après I.A. et l'équation fonctionnelle de r, les points de la courbe sont tous envoyés sur le cercle de centre 0, de rayon $1/e$.

Deuxième Partie

II.A. Si au moins deux racines sont égales, P_n admet une racine au moins double λ, ie $P_n'(\lambda) = P_n(\lambda) = 0$. Mais $P_n'(\lambda) = P_n(\lambda) - \frac{\lambda^n}{n!}$, et donc on obtient $\lambda = 0$.

II.B. Nous avons :

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= \frac{n!}{n^n} X^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k! X^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^{n-k} k!} X^{n-k} \\ &= \sum_{p=0}^{n} q_{n,p} X^p. \end{aligned}$$

En outre, les racines de Q_n sont les $1/z_{n,k}$.

II.C.1. Si $|z| \leq r < 1$, alors $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} z^p$, et donc :

$$\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| = \left|\sum_{p=0}^{+\infty} z^p - \sum_{p=0}^{+\infty} q_{n,p} z^p\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |1 - q_{n,p}|\, r^p.$$

Il reste à remarquer que $0 \leq q_{n,p} \leq 1$, pour enlever les valeurs absolues dans l'expression de droite. En particulier, l'inégalité précédente est toujours valable si l'on prend le sup par rapport à z, pour $|z| \leq r$. Nous allons alors appliquer le théorème de convergence dominée pour les séries, rappelé en préambule de l'énoncé :

- $|1 - q_{n,p}| r^p \leq r^p$.
- $\sum_{p=0}^{+\infty} r^p$ converge.
- Pour tout p, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - q_{n,p}) r^p = 0$.

Le théorème de convergence dominée, ainsi que le théorème d'encadrement des limites, nous permet d'affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{|z|\leq r} \left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| = 0.$$

II.C.2. Soit donc $R > 0$. Nous fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (cf après). Soit n_0 tel que $n \geq n_0$ implique

$$\sup_{|z|\leq r} \left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| \leq \varepsilon.$$

Si $|z| \leq r$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{1-z}\right| - |Q_n(z)| \leq \varepsilon.$$

Ceci nous conduit à l'inégalité : $|Q_n(z)| \geq \frac{1}{|1-z|} - \varepsilon$. Si ε a été choisi suffisamment petit, il ne fait pas de doute que $|Q_n(z)| > 0$, et donc si $|z| \leq r$, z n'est pas racine de Q_n. En particulier, toute racine de Q_n est de module plus grand que r.

Soit maintenant $R > 1$, on pose $r = 1/R$, et on considère N tel que si z est une racine de Q_n, avec $n > N$, alors $|z| > r$. Alors, pour $n > N$, et $k \in \{1,2,\dots,n\}$, $1/z_{n,k}$ est une racine de Q_n, et donc :

$$\left|\frac{1}{z_{n,k}}\right| > r = \frac{1}{R}.$$

II.D.1. Si $|z| \leq 1$, et $Re(z) = 1$, alors la seule possibilité est $z = 1$, et donc $(z_p e^{-z_p})$ converge vers e^{-1}.

II.D.2. Ce sujet alterne questions faciles (comme la précédente), et questions plus difficiles comme celle-ci! Pour déterminer la limite de α_p, nous allons appliquer le théorème de convergence dominée. On note :

$$f_p(t) = 1_{[0,p]}(t)\left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t},$$

où $1_{[0,p]}$ désigne la fonction indicatrice de $[0,p]$, de sorte que $\alpha_p = \int_0^{+\infty} f_p(t)dt$. Nous savons (inégalité de convexité par exemple), que pour t dans $[0,p]$, on a :

$$\ln\left(1 - \frac{t}{p}\right) \leq -\frac{t}{p},$$

ce qui donne encore :

$$\left|1 - \frac{t}{p}\right|^p \leq \exp(-t).$$

Nous en déduisons donc que :

$$\begin{array}{rcl} |f_p(t)| & \leq & |\exp((z_p - 1)t) \\ & \leq & \exp((\Re(z_p) - 1)t) \end{array}$$

Pour p assez grand, nous avons $Re(z_p) \leq a < 1$, et on sait que $\int_0^{+\infty} \exp((a-1)t)dt$ converge. Il reste à constater que, à t fixé, $f_p(t)$ tend, quand p tend vers $+\infty$, vers $\exp(-t)\exp(zt)$. On en déduit donc que α_p converge vers :

$$\int_0^{+\infty} \exp((z-1)t) = \frac{1}{1-z}.$$

La détermination de la limite de β_p n'est pas forcément plus facile, surtout sans indications! En passant en notations exponentielles, nous avons :

$$\beta_p = \exp\left(\frac{p}{p+1}\ln p - \frac{\ln(1) + \cdots + \ln(p)}{p+1}\right).$$

Il nous faut estimer $\ln(1) + \cdots + \ln(p)$, et pour cela nous allons utiliser une comparaison à une intégrale. En effet, pour $k \geq 2$, nous avons :

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt.$$

En sommant ces inégalités, nous prouvons l'existence de deux constantes C et C' telles que, pour tout $p \geq 2$,

$$p\ln p - p + C \leq \ln(1) + \cdots + \ln(p) \leq p\ln(p) - p + C'.$$

On répercute cette inégalité dans l'expression de β_p :

$$\exp\left(\frac{p\ln p - p\ln p + p - C'}{p+1}\right) \leq \beta_p \leq \exp\left(\frac{p\ln p - p\ln p + p - C}{p+1}\right).$$

Le théorème d'encadrement des limites prouve alors que β_p tend vers e.
Nous avons alors :

$$\left|\frac{p^p}{p!}\int_O^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t}dt\right|^{1/p+1} = \alpha_p^{1/p+1}\beta_p,$$

quantité qui tend donc vers e.

II.E.1. Toute la difficulté de cette question consiste à trouver la fonction à laquelle appliquer une formule de Taylor (ici, sans suspens, avec reste intégral). L'idée est d'utiliser le fait que $\sum_{k=0}^{p}\frac{p^kz^k}{k!}=0$. Une fonction qui permettra d'obtenir de telles dérivées est : $f(t)=\exp(pzt)$. f est C^∞ sur [0,1]. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f, à l'ordre p, entre 0 et 1. Remarquons que $f^{(k)}(t)=(pz)^ke^{pzt}$, et donc $f^{(k)}(0)=(pz)^k$. Nous obtenons :

$$e^{pz}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(pz)^k}{k!}+\int_0^1(1-t)^p\frac{p^{p+1}z^{p+1}}{p!}e^{pzt}dt.$$

Nous savons que la somme à droite est nulle. D'autre part, dans l'intégrale, nous réalisons le changement de variables $u=pt$. Nous obtenons $dt=\frac{du}{p}$, et :

$$e^{pz}=\frac{p^p}{p!}z^{p+1}\int_0^p\left(1-\frac{u}{p}\right)^pe^{zu}du.$$

En multipliant par $e^{-(p+1)z}$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient le résultat souhaité.

II.E.2. On utilise II.C.2. Soit $R>1$, et N obtenu par la question II.C.2. Pour $n>N$, on a : $p_n\geq n>N$, et donc $|z_{p_n}|<R\cdot$ En passant à la limite, on obtient que $|z|\leq R$. Comme cet inégaité est vraie pour tout $R>1$, on en déduit que $|z|\leq 1$. La question II.D.2. et la formule (2) indique alors clairement que $|ze^{-z}|=1/e$, si $Re(z)\neq 1$, et la question II.D.1. répond au dernier cas.

II.E.3. Comme généreusement indiqué par l'énoncé on suppose que la limite est strictement positive. Soit donc $\varepsilon>0$, et p_n une suite strictement croissante d'entiers tels que : $\max_{1\leq k\leq p_n}\big||\zeta_{p_n,k}|-1/e\big|\geq\varepsilon$. Soit, pour tout n, un ζ_{p_n,k_n} tel que $\big||\zeta_{p_n,k_n}|-1/e\big|\geq\varepsilon$. Nous écrivons $\zeta_{p_n,k_n}=z_{p_n}\exp(-z_{p_n})$, où z_{p_n} est une racine de Π_{p_n}. Cette suite (z_{p_n}) est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers un réel z. Le passage à la limite dans les inégalités précédentes imposent en particulier que :

$$\big||ze^{-z}|-1/e\big|\geq\varepsilon.$$

Ceci est manifestement en contradiction avec le résultat de la question précédente.

Troisième Partie

III.A. Une fraction rationnelle est développable en série entière au voisinage de tout point qui n'est pas un de ses pôles, donc f_n est développable en série entière au voisinage de 0. En outre, nous savons depuis II.B. que $q_n(X)=C(X-1/z_{n,1})\dots(X-1/z_{n,n})$, et donc :

$$f_n(X)=-\frac{1}{X-1/z_{n,1}}-\dots-\frac{1}{X-1/z_{n,n}}.$$

Rappelons que :

$$\frac{1}{a-X}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{X}{a}}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{X^n}{a^{n+1}}.$$

Le développement en série entière de f_n au voisinage de 0 est donc :

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty}z_{n,k}^{p+1}x^p\\&=\sum_{p=0}^{+\infty}s_{n,p+1}x^p.\end{aligned}$$

III.B.1. Écrivons que $Q_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} q_{n,p}x^p$, soit $Q_n'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}(p+1)q_{n,p+1}x^p$. Par définition, on sait que $f_n(x)Q_n(x) = -Q_n'(x)$. Nous écrivons l'égalité des développements en série entière :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{p} q_{n,i}s_{n,p+1-i}x^p = -\sum_{p=0}^{+\infty}(p+1)q_{n,p+1}x^p.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit le résultat.

III.B.2. Nous écrivons par exemple que $s_{n,1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{n,k}$. Mais :

$$\begin{aligned}(X-\lambda_{n,1})\dots(X-\lambda_{n,n}) &= X^n - (\lambda_{n,1}+\dots+\lambda_{n,n})X^{n-1}+\dots\\ &= n!P_n(X)\\ &= X^n + nX^{n-1}+\dots\end{aligned}$$

On obtient donc $s_{n,1} = -1$. Prouvons alors par récurrence sur p que $|s_{n,p}| \leq 3^p$:

- C'est vrai pour $p = 1$.
- Si le résultat est vérifié pour tout $k \leq p$, on a :

$$\begin{aligned}s_{n,p+1} &= -(p+1)q_{n,p+1} - \sum_{i=1}^{p} q_{n,i}s_{n,p+1-i}\\ |s_{n,p+1}| &\leq (p+1) + \sum_{i=1}^{p} 3^{p+1-i}\\ &\leq (p+1) + \frac{3^{p+1}}{2}.\end{aligned}$$

Maintenant, il est facile de vérifier pour tout $p \geq 1$ que $p+1 \leq \frac{3^{p+1}}{2}$. Ceci prouve le résultat.

L'obtention de la majoration de $|S_{n,p}|$ semble tout de même assez délicate sans indication supplémentaire. Commençons par remarquer que si a et b sont deux nombres complexes, alors $|e^a + e^b| \leq e^{|a+b|}$. En effet, si l'on écrit $a = x+iy$ et $b = x'+iy'$, alors

$$\begin{aligned}|e^a+e^b| &\leq e^x + e^{x'}\\ &\leq e^{x+x'}\\ &\leq e^{Re(a+b)}\\ &\leq e^{|a+b|}.\end{aligned}$$

Passons à la majoration proprement dite :

$$\begin{aligned}|S_{n,p}| &\leq |\sum_{k=1}^{n}\exp(p\ln(z_{n,k}) - pz_{n,k})|\\ &\leq \exp(|\sum_{k=1}^{n} p\ln(z_{n,k}) - pz_{n,k}|)\\ &\leq |s_{n,p}|\exp(p|s_{n,p}|)\\ &\leq 3^pe^{3p}.\end{aligned}$$

III.C.1. Rappelons-nous du début de l'énoncé qui nous incite à utiliser II.E.3. pour cette question. Soit donc $\varepsilon > 0$, et N un entier tel que, si $n > N$, $1 \leq k \leq n$, alors :

$$\big||\zeta_{n,k}| - 1/e\big| \leq \varepsilon.$$

Nous écrivons que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} &= \frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e}e^{ip\phi_{n,k}}\\
&= \frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{n,k}e^{ip\phi_{n,k}}+\frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n}(1/e-\rho_{n,k})e^{ip\phi_{n,k}}\\
&= \frac{e}{n}S_{n,p}+\frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n}(1/e-\rho_{n,k})e^{ip\phi_{n,k}}
\end{aligned}$$

Maintenant, on sait que $\frac{e}{n}S_{n,p}$ tend vers 0 d'après III.B.2., tandis que :

$$\Big|\frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n}(1/e-\rho_{n,k})e^{ip\phi_{n,k}}\Big| \leq \frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n}|1/e-\rho_{n,k}| = e\varepsilon.$$

Ceci suffit à prouver le résultat.

III.C.2. Si f est un polynôme trigonométrique, l'égalité est simplement une reformulation de l'égalité précédente. Maintenant, si (f_n) est une suite de fonctions pour lesquelles l'égalité est vraie, et si cette suite converge uniformément vers f, l'égalité est aussi vérifiée pour f. Il reste à appliquer le théorème de Dirichlet, qui dit qu'une fonction $2\pi-$périodique, continue, et de classe C^1 par morceaux, est limite uniforme de polynômes trigonométriques (les sommes partielles de sa série de Fourier).

Remarque : Cette égalité est en fait vraie pour toute fonction f continue et $2\pi-$ périodique, pour les mêmes raisons. Il suffit simplement de remplacer l'utilisation du théorème de Dirichlet par un théorème hors-programme, le théorème de Weierstrass, ou celui de Féjer, qui dit que toute fonction de ce type est limite uniforme de polynômes.

Quatrième Partie

IV.A. On suppose que la limite est non nulle. En raisonnant comme en II.E.3., il existe un réel $\varepsilon > 0$, et des suites extraites (z_{p_n}), (r_{p_n}) et (θ_{p_n}) tels que $z_{p_n} = r_{p_n}e^{i\theta_{p_n}}$, z_{p_n} est une racine de Π_{p_n}, (z_{p_n}) converge vers z, (r_{p_n}) converge vers r, (θ_{p_n}) converge vers θ, et :

$$|r-r(\theta)| \geq \varepsilon.$$

Mais d'après II.E.2., $re^{-r\cos\theta} = 1/e$, et on sait déjà que $r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta} = 1/e$. Comme r et $r(\theta)$ sont éléments de $]0,1]$, et que $f(x) = xe^{-x\cos\theta}$ est bijective sur $[0,1]$, on a nécessairement $r = r(\theta)$. Absurde! En particulier, les (z_n) tendent à s'approcher de la courbe Γ.

IV.B. Nous savons d'après I.A. que $\phi_{n,k} = \theta_{n,k} - r_{n,k}\sin\theta_{n,k}$. Soit $\varepsilon > 0$. f est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x-y| < \eta$, alors $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Soit $N > 0$ tel que :

1. $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi\right| \leq \varepsilon.$
2. $n \geq N \Rightarrow |r_{n,k} - r(\theta_{n,k})| \leq \varepsilon.$

Alors, pour tout $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\theta_{n,k}-r(\theta_{n,k})\sin\theta_{n,k}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(\theta_{n,k}-r(\theta_{n,k})\sin\theta_{n,k}) - f(\phi_{n,k})|\\
&\quad +\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi\right|\\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

IV.C. Etait-il nécessaire de répondre à cette question pour avoir une bonne note???