A 2001 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

(**Durée de l'épreuve** : **4 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit **C** l'espace vectoriel normé des fonctions réelles, définies sur le segment $I = [-1, 1]$, continues ; la norme de cet espace est la norme de la convergence uniforme, définie pour une fonction f de **C** par la relation :

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Pour tout entier naturel n, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n, est notée $\mathbf{E}_n$. Par abus de langage, la locution " fonction polynomiale" est remplacée par polynôme.

Première partie

Il est admis que, pour une fonction f donnée continue sur le segment I et un entier naturel donné n, il existe un polynôme P_n, de degré inférieur ou égal à n, tel que :

$$\|f - P_n\| = \Delta_n(f) = \inf\{\|f - P\| \mid P \in E_n\}.$$

Le but de cette partie est d'étudier l'erreur commise lors de la meilleure approximation d'une fonction continue par une fonction polynomiale et de montrer le résultat : si f est une fonction k-fois continûment dérivable sur $I = [-1, 1]$, la meilleure approximation de la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n est telle que :

$$\Delta_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Soit φ une fonction réelle définie sur l'intervalle I, bornée (il existe une constante M telle que, pour tout réel x de I, $|\varphi(x)| \leq M$). À cette fonction φ est associée la fonction ω_φ, dite “module de continuité de φ”. Elle est définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ de la manière suivante :

Étant donné un réel h strictement positif, $\omega_\varphi(h)$ est égal à la borne supérieure des réels $|\varphi(x)-\varphi(y)|$ sachant que x et y sont deux réels de l’intervalle I dont la valeur absolue de la différence est majorée par h :

$$\omega_\varphi(h) = \sup\left\{|\varphi(x)-\varphi(y)|\ ;\ \left(x,\, y\right) \in I^2,\ |x-y| \leq h\right\}.$$

I-1. **Propriétés du module de continuité** :

Soit φ une fonction réelle définie et bornée sur le segment I.

a. Démontrer que le module de continuité de cette fonction φ est une fonction croissante définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$.

b. Soient h et h' deux réels strictement positifs, démontrer la propriété :

$$\omega_\varphi(h+h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h').$$

Soient h et λ deux réels strictement positifs, n un entier supérieur ou égal à 1 ; démontrer les relations suivantes :

$$\omega_\varphi\left(n\,h\right) \leq n\,\omega_\varphi(h) \quad ; \quad \omega_\varphi\left(\lambda\,h\right) \leq (1+\lambda)\,\omega_\varphi(h).$$

c. Démontrer que la fonction φ est uniformément continue sur le segment I si et seulement si la limite du module de continuité ω_φ en 0 est nulle :

$$\varphi \text{ est uniformément continue sur } I \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0.$$

d. Démontrer que, si la fonction φ est continûment dérivable sur le segment I, il vient pour tout réel positif h :

$$\omega_\varphi(h) \leq h\,\|\varphi'\|.$$

I-2. **Noyaux de Dirichlet et de Fejer** :

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), soient D_n et F_n les fonctions définies pour tout réel θ par les relations suivantes :

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}\ ;\ F_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} D_k(\theta).$$

Il est admis que la fonction F_n vérifie les relations suivantes :

pour tout θ différent de $2k\pi$, k entier relatif, $F_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ik\theta} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(n\,\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)}\right)^2.$

Soit K_n la fonction définie dans l’ensemble $\mathbf{R} \setminus 2\pi\,\mathbf{Z}$ par la relation suivante :

$$K_n(\theta) = \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\sin\left(n\,\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)}\right)^4,$$

où le réel λ_n est défini par la condition :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\theta)\, d\theta = 1.$$

a. Calculer le réel λ_n et déterminer une constante C telle que ce réel soit équivalent à l'infini à $C\, n^3$. Rappel :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

b. Soit α la fonction définie sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\pi/2]$ par la relation suivante :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{t^4}.$$

Démontrer qu'il existe une constante A_1 telle que la fonction α soit équivalente en 0 à $A_1\, t^{-2}$. En déduire que la fonction $t \mapsto t^3\, \alpha(t)$ est bornée sur l'intervalle $]0,\pi/2]$. Soit A_2 un majorant de cette fonction sur l'intervalle $]0,\pi/2]$.

Soient I_n et J_n les deux intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4(nt)}{t^3} dt \quad ; \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t\, \alpha(t)\, \sin^4(nt) dt.$$

Démontrer les deux propriétés suivantes :

lorsque l'entier n tend vers l'infini, $\quad I_n \sim n^2 . \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt \quad ;$

pour tout entier naturel n, $(n \geq 1)$, $\quad J_n \leq A_2\, n \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt.$

c. Démontrer l'existence d'une constante M_0 telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il vienne :

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(1 + n\, t\right) K_n(t)\, dt \leq M_0.$$

I-3. **Polynôme** $j_n[g]$:

Soit g une fonction paire définie sur la droite réelle périodique et de période 2π ; étant donné un entier n supérieur ou égal à 1, soit $j_n[g]$ la fonction définie par la relation suivante :

$$j_n[g](\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - t)\, K_n(t)\, dt.$$

a. Démontrer que la fonction $j_n[g]$ est paire et est un polynôme de degré au plus égal à $2n-2$.

b. Vérifier les inégalités suivantes :

$$|g(\theta) - g(\theta - t)| \leq \omega_g(|t|) \leq \left(1 + n\,|t|\right)\, \omega_g\left(\frac{1}{n}\right),$$

puis, en utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer la majoration :

$$|g(\theta) - j_n[g](\theta)| \leq M_0\, \omega_g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans la suite l'entier n est supposé supérieur ou égal à 3 ; à l'entier n est associé l'entier p égal à la partie entière du réel $n/2$. L'entier vérifie les inégalités :

$$p \leq n/2 < p+1.$$

I-4. **Polynôme associé à une fonction de l'espace C** :

Soit f une fonction de l'espace **C**. À cette fonction f est associée la fonction g périodique de période 2π, définie, pour tout réel θ, par la relation :

$$g(\theta) = f(\cos\theta).$$

Soit P_n la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ par la relation : pour tout réel x de I,

$$P_n(x) = j_{p+1}[g](Arc\cos x).$$

L'entier p est la partie entière de $n/2$ définie ci-dessus.

a. Démontrer que la fonction P_n est un polynôme (une fonction polynomiale) de degré au plus égal à n. Il est admis que, pour tout entier naturel k, la fonction $x \mapsto \cos\big(k\,Arc\cos x\big)$ est un polynôme de degré k.

b. Démontrer, pour toute fonction f de l'espace **C** et tout entier n $(n \geq 3)$, la relation suivante :

$$\Delta_n(f) \leq 2\, M_0\, \omega_f\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

La constante M_0 a été introduite à la question I-2.c et $\Delta_n(f)$ dans l'introduction de la partie I.

c. Établir le résultat préliminaire : soit f une fonction de l'espace **C** ; pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à n, il vient :

$$\Delta_n(f) = \Delta_n(f - Q).$$

Démontrer, pour toute fonction f continûment dérivable sur le segment $I = [-1, 1]$ et tout entier n, la relation ci-dessous entre $\Delta_n(f)$ et $\Delta_{n-1}\big(f'\big)$:

$$\Delta_n(f) \leq 2\, \frac{M_0}{n}\, \Delta_{n-1}\big(f'\big).$$

d. Étant donné un entier k supérieur ou égal à 1 $(k \geq 1)$, soit f une fonction k-fois continûment dérivable ; déduire du résultat précédent une majoration, pour tout entier n supérieur strictement à k $(n > k)$, de $\Delta_n(f)$ en fonction de $\Delta_{n-k}\big(f^{(k)}\big)$.

En déduire que, si f est une fonction k-fois continûment dérivable et n un entier croissant indéfiniment, l'expression $\Delta_n(f)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $1/n^k$.

$$\Delta_n(f) = o\Big(\frac{1}{n^k}\Big).$$

SECONDE PARTIE

Le but de cette partie est, pour une fonction f donnée dans **C**, de construire une suite de polynômes $I_n[f]$, qui, lorsque la fonction f est continûment dérivable, converge uniformément vers la fonction f.

Dans cette partie, l'entier n est fixé et est supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$). Soit $\mathbf{E}_n^0$ le sous-espace de $\mathbf{E}_n$ constitué des polynômes (fonctions polynomiales) nulles en -1 et en 1.

II-1. L'espace préhilbertien $\mathbf{E}_n^0$:

a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$? Soit $(e_k)_{2\leq k\leq n}$ la suite de polynômes définie par la relation :

$$\text{pour tout entier } k,\ 2 \leq k \leq n, \quad e_k(x) = x^k - x^{k-2}.$$

Démontrer que la suite de ces polynômes est une base B de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$.

b. Soit Φ_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$ défini par la relation suivante :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbf{E}_n^0, \quad \Phi_n(P)(x) = (1 - x^2)\, P''(x).$$

Démontrer que la matrice M_n associée à l'endomorphisme Φ_n dans la base B est une matrice triangulaire supérieure ; déterminer les éléments de la diagonale de cette matrice.

En déduire l'existence d'une base B' définie par une suite de polynômes $(Q_k)_{2\leq k\leq n}$ qui vérifient les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 2 \leq k \leq n, \quad (1 - x^2)\, Q_k''(x) = \mu_k\, Q_k.$$

Ces polynômes sont supposés unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1). Préciser les coefficients μ_k, $2 \leq k \leq n$ et le degré des polynômes Q_k.

c. À deux polynômes quelconques P et Q appartenant à l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$ est associée l'intégrale $J(P,Q)$ définie par la relation suivante :

$$J(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)\, Q(x)}{1 - x^2}\, dx.$$

Démontrer que cette intégrale existe ; à quelle condition sur le polynôme P l'expression $J(P,P)$ est-elle nulle ?

Il est admis dans la suite que l'application $(P,Q) \mapsto J(P,Q)$ de $\mathbf{E}_n^0 \times \mathbf{E}_n^0$ dans $\mathbf{R}$ est un produit scalaire. Dans la suite le produit scalaire est noté $(. \mid .)$:

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)\, Q(x)}{1 - x^2}\, dx.$$

d. Démontrer que la base $B' = (Q_k)_{2\leq k\leq n}$ est orthogonale dans l'espace préhilbertien $(\mathbf{E}_n^0, (. \mid .))$.

II-2. Racines du polynôme Q_n :

a. Un résultat préliminaire : démontrer que le polynôme Q_n possède la propriété : pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 3$, l'intégrale K ci-dessous est nulle :

$$K = \int_{-1}^{1} P(x)\, Q_n(x)\, dx = 0.$$

b. Deux cas sont considérés :

i. Le polynôme Q_n admet des racines, d'ordre de multiplicité impair, situées dans l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$. Soient $x_1,\ x_2,\ ..., x_p,$ ces racines (l'entier p est strictement positif).

Soit R_1 le polynôme défini par la relation :

$$R_1(x) = \prod_{k=1}^{k=p} (x - x_k).$$

Démontrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto R_1(x)\ Q_n(x)$ étendue au segment I est différente de 0 :

$$\int_{-1}^{1} R_1(x)\ Q_n(x)\ dx \neq 0.$$

En utilisant le résultat de l'alinéa a, déterminer le degré du polynôme R_1.

ii. Le polynôme Q_n n'a pas de racines, d'ordre de multiplicité impair, situées dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

Démontrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto Q_n(x)$ étendue au segment I est différente de 0.

En déduire que les racines du polynôme Q_n sont simples et situées sur le segment I.

Dans la suite, les racines du polynôme Q_{n+1} sont notées $y_k,\ k = 0, 1, ..., n$ et vérifient la relation suivante :

$$-1 = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n = 1.$$

II-3. **Polynôme** $I_n[f]$:

Soit f une fonction continue appartenant à l'espace $\mathbf{C}$: $f : I \to \mathbf{R}$.

a. Soit u_n l'application de l'espace vectoriel E_n dans $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par la relation suivante :

$$u_n(P) = \big(P(y_0),\ P(y_1),\ ..., P(y_n)\big).$$

Démontrer que l'application u_n est un isomorphisme de l'espace vectoriel E_n sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

En déduire qu'à une fonction f donnée dans $\mathbf{C}$, est associé un seul polynôme $I_n[f]$ appartenant à E_n, vérifiant les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 0 \leq k \leq n, \quad I_n[f](y_k) = f(y_k).$$

Démontrer que, si P est un polynôme appartenant à E_n, il vient :

$$I_n[f - P] = I_n[f] - P.$$

b. Démontrer que le polynôme $I_n[f]$ s'écrit :

$$I_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} f(y_k)\ L_k(x).$$

où L_k est le polynôme défini par la relation :

$$L_k(x) = \frac{Q_{n+1}(x)}{(x - y_k)\ Q_{n+1}'(y_k)}.$$

c. Démontrer, pour tout polynôme P appartenant à E_n, l'inégalité :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I, \quad |f(x) - I_n[f](x)| \le \left(1 + \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|\right) \|f - P\|.$$

II-4. Majoration de $\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$:

Soit f une fonction continue appartenant à l'espace **C** : $f : I \to \mathbf{R}$.

a. Soit v_n l'application de l'espace vectoriel E_{2n+1} dans $\mathbf{R}^{2n+2}$ définie par la relation suivante :

$$v_n(P) = \left(P(y_0),\ P(y_1),\ \ldots, P(y_n),\ P'(y_0),\ P'(y_1),\ \ldots, P'(y_n)\right).$$

Démontrer que l'application v_n est un isomorphisme de l'espace vectoriel E_{2n+1} sur $\mathbf{R}^{2n+2}$.

En déduire qu'à une fonction f donnée dans **C** est associé un seul polynôme $H_n[f]$ appartenant à E_{2n+1}, vérifiant les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 0 \le k \le n, \quad H_n[f](y_k) = f(y_k),\ H_n[f]'(y_k) = f'(y_k).$$

Que vaut $H_n[1]$?

Il est admis que le polynôme $H_n[f]$ est défini par la relation suivante :

$$H_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} f'(y_k)\,(x - y_k)\,(L_k(x))^2 + \sum_{k=0}^{n} f(y_k)\,(1 - 2(x - y_k)L_k'(y_k))\,(L_k(x))^2.$$

b. Calcul des dérivées $L_k'(y_k)$.

Déterminer l'expression, pour tout entier k compris entre 0 et n $(0 \le k \le n)$, de la dérivée $L_k'(y_k)$ en fonction des dérivées première et seconde $Q_{n+1}'(y_k)$ et $Q_{n+1}''(y_k)$.

En utilisant l'équation différentielle vérifiée par le polynôme Q_{n+1} (question II-1.b) déterminer les valeurs de $L_k'(y_k)$ lorsque l'entier k est compris entre 1 et $n-1$ $(1 \le k \le n-1)$. Calculer ensuite $L_0'(y_0)$ et $L_n'(y_n)$.

c. En déduire les inégalités :

$$\text{pour tout réel } x \text{ du segment } I, \quad \sum_{k=0}^{n} (L_k(x))^2 \le 1, \quad \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| \le \sqrt{n+1}.$$

II-5 Estimation de l'approximation :

Démontrer que, pour toute fonction continue appartenant à l'espace **C**, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, la norme de la différence entre la fonction f et le polynôme $I_n[f]$ est majorée par le produit $2\sqrt{n}\ \Delta_n(f)$:

$$\|f - I_n[f]\| \le 2\sqrt{n}\ \Delta_n(f).$$

En particulier démontrer que, si la fonction f est continûment dérivable sur I, la suite des polynômes $I_n[f]$ converge uniformément, lorsque l'entier n tend vers l'infini, vers la fonction f.

Que dire de la convergence lorsque la fonction f est indéfiniment continûment dérivable ?

FIN DU PROBLÈME