Cours de Mathématiques

1. Calcul intégral
2. Équations différentielles linéaires
3. Fonctions de plusieurs variables

Pour BCPST 1

Année scolaire : 2004/2005

16 juin 2005

Mohamed TARQI

Table des matières

Chapitre 1

Calcul intégral

1. Intégrale d'une fonction continue sur un segment
2. Propriétés de l'intégrale
3. Procédés d'intégration
4. Applications du calcul intégral

1.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1.1 Définition d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un segment I. Elle admet une inifinité de primitives sur I. Si F et G sont deux d'entre elles, il existe un réel λ tel que, pour tout x de I : $G(x) = F(x) + \lambda$.

Donc, pour tous réels a et b de I, on a : $F(a) - F(b) = G(a) - G(b)$, d'où la définition :

Définition 1.1.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (a, b) un couple d'éléments de I. F étant une primitive de f sur I, le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de cette primitive. On l'appelle intégrale de f de a à b et on le note $\int_a^b f(x)dx$:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarques

· $\int_a^b f(x)dx$ se lit " somme de a à b de $f(x)dx$ "
· La différence $F(b) - F(a)$ se note usuellement $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

· Dans la notation $\int_a^b f(x)dx$, la variable x n'intervient pas dans le résultat. On dit qu'il s'agit d'une variable muette, on peut remplacer x par n'importe quelle autre lettre sauf a, b, f.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$$

Exemples

- $\cdot \int_1^2 xdx = [\frac{1}{2}x^2]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2}$
- $\cdot \int_1^0 e^t dt = [e^t]_{t=1}^{t=0} = 1 - e$
- $\cdot \int_1^3 x^2 y dx = [\frac{1}{3}x^3 y]_{x=1}^{x=3} = \frac{26}{3}y$

Théorème 1.1.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I. L'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 au point a est la fonction : $x \longrightarrow \int_a^x f(x)dx$, on note $\int f(x)dx$ toute primitive de f.*

Preuve : Soit F l'unique primitive de f sur I s'annulant en a : $F(a) = 0$
Par définition, pour tout x de I : $\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a) = F(x)$

Application : *La fonction logarithme*

Pour tout réel x strictement positif, $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

1.1.2 Interprétation géométrique de l'intégrale

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan P. la donnée de ce repère fixe une unité d'aire.

Proposition 1.1.1. *Soit f une fonction continue et positive définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Soit D_f la partie du plan P définie par : $\{M(x, y) \in P \ / \ a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)\}$. On admet que l'aire de D_f, notée $A(D_f)$, est égale à $\int_a^b f(x)dx$.*

Application L'aire d'un disque de rayon R, c'est :

$$2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = \pi R^2$$

1.2 Propriétés de l'intégrale

1.2.1 Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration

Relation de Chasles

Proposition 1.2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de I on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Preuve : Soit F une primitive de f sur I, on a pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de I :

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx &= [F(x)]_{x=a}^{x=c} + [F(x)]_{x=c}^{x=b} \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= [F(x)]_{x=a}^{x=b} \\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, pour tout a de I, on a : $\int_a^a f(x)dx = 0$.*

Preuve :

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x)dx &= [F(x)]_{x=a}^{x=a} \\ &= F(a) - F(a) = 0\end{aligned}$$

Corollaire 1.2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, pour tout couple (a, b) de I, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Preuve :

$$\int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0$$

donc :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

1.2.2 Propriétés relatives à la fonction intégrée

Linéarité

Proposition 1.2.3. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b des éléments de I et λ un réel quelconque, alors :*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Preuve : Soit F une primitive de f et G une primitive de g, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ et λF est une primitive de λf et on a :

d'une part

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+g(x)]dx &= [F(x)+G(x)]_{x=a}^{x=b} \\ &= F(b)+G(b)-F(a)-G(a) \\ &= [F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)] \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(x)dx &= [\lambda F(x)]_{x=a}^{x=b} \\ &= \lambda [F(x)]_{x=a}^{x=b} \\ &= \lambda \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

Positivité

Théorème 1.2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.*

· *Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

· *Si f est positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.*

Preuve :

· Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $F' = f$.
f étant positive sur $[a,b]$, F est croissante sur $[a,b]$ et donc $F(b)-F(a) \geq 0$
soit $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

· La condition $\int_a^b f(x)dx = 0$ signifie $F(b)-F(a)=0$, or f est positive sur $[a,b]$, donc :

$$\forall x \in [a,b], F(a) \leq F(x) \leq F(b)$$

Puisque $F(a)=F(b)$, F est constante sur $[a,b]$. Il en résulte que sa dérivée f est nulle sur $[a,b]$

Corollaire 1.2.2. *Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$. Si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*

Preuve : $g-f$ étant positive, donc $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \geq 0$, c'est à dire $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$.

Corollaire 1.2.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. S'il existe deux réels m et M tels que, pour tout x de $[a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$*

Preuve : C'est clair

Corollaire 1.2.4. *Si f est continue sur $[a,b]$, alors* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. *et si* $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$, *alors*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$$

Preuve :

· Pour tout x de $[a,b]$, on a : $f(x) \leq |f(x)|$ et $-f(x) \leq |f(x)|$, d'où :

$$\int f(x) \leq \int_a^b |f(x)| \quad \text{et} \quad -\int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|$$

c'est à dire :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

· Pour tout x de $[a,b]$, on a : $|f(x)| \leq M$
donc $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq M\int_a^b dx = M\,(b-a)$

1.2.3 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 1.2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels distincts de I $(a<b)$. Le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $n \in N^*$
On pose :

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_i = a + i\frac{b-a}{n}, ..., x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b.$$

on a :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Considérons les deux suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ définies par :
$(\forall n \geq 1)$ $\quad s_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{i=n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})$ $\quad$ et $\quad S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(a + i\frac{b-a}{n})$

Théorème 1.2.2. *Les deux suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Exemples

1. Cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n+i}$

$$(\forall n\geq 1),\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}f(1+\frac{i}{n})\qquad\text{avec}\quad f(x)=\frac{1}{x}$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}f(1+\frac{i}{n})$$
$$=\int_1^2\frac{dx}{x}$$
$$=\ln 2$$

2. Cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{n^2+i^2}$

$$(\forall n\geq 1),\qquad n\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n^2+i^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1}f(\frac{i}{n})\qquad\text{avec}\qquad f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}n\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{n^2+i^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1}f(\frac{i}{n})$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\frac{1}{4}\pi$$

1.3 Procédés d'intégration

1.3.1 Intégration par parties

Théorème 1.3.1. *Soient u et v deux fonctions dérivables et à dérivées continues sur $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Preuve : $\forall x \in [a,b],\ \ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$
$$= [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b}$$

d'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(xv'(x))dx$$

Exemples

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$
$= \frac{\pi}{2} - [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= \frac{\pi}{2} - 1$
2. $\int_0^x t^2 \sin t dt = [t^2(-\cos t)]_0^x - \int_0^x 2t(-\cos t)dt$
$= x^2\cos x + 2\int_0^x t\cos t dt$
$= x^2\cos x + 2[t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t dt$
$= x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x - 1)$

1.3.2 Intégration par changement de variable

Théorème 1.3.2. *Soient f une fonction continue sur $[\alpha,\beta]$ et φ une fonction dérivable sur $[a,b]$ et à dérivée continue sur $[a,b]$ tels que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$, alors :*

$$\int_a^b f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Preuve : Soit F une primitive de f sur $[\alpha,\beta]$, on a, $\forall x \in [a,b]$:
$(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$
$= f(\varphi(x))\varphi'(x)$
donc $F\circ\varphi$ est une primitive de la fonction $x- > f(\varphi(x))\varphi'(x)$, d'où :
$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = [F\circ\varphi(x)]_a^b$
$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$
$= F(\beta) - F(\alpha)$
$= \int_\alpha^\beta f(t)dt$

Exemples

1. Calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1)\sin 2x dx$
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1)\sin 2x dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1) 2\sin x\cos x dx$
$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 x + \sin x)\cos x dx$
On pose $t = \sin x$
donc $dt = \cos x dx$ et si $x = 0$ alors $t = 0$ et si $x = \frac{\pi}{2}$ alors $t = 1$, d'où :

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t^5+t)dt \\ &= 2[\frac{t^6}{6}+\frac{t^2}{2}]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. Cherchons la primitive de $x \longrightarrow \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

   Notons F cette primitive, donc $\forall x > 0, \;\; F(x) = \int_1^x \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt$

   On pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dt}{2u}$

   donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt \\ &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2udu}{(1+u^2)u} \\ &= 2[\arctan u]_1^{\sqrt{x}} \\ &= 2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice

1) Soit f une fonction numérique continue et T-périodique, a un nombre réel. Montrer que :

$$\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$$

2) Soit f une fonction paire (resp. impaire) définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$ (resp. $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$)

1.3.3 Exemples de calcul des intégrales

1. Pour tout nombre a (réel ou complexe) non nul, on a sur tout $\mathbb{R}$:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + cte$$

   d'où, en posant $a = \alpha + i\beta$, et en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\int e^{\alpha}\cos\beta x dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x} + cte,$$

$$\int e^{\alpha}\sin\beta x dx = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x} + cte.$$

2. Pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout nombre réel ou complexe a, on a sur $\mathbb{R}$:

$$\int(x-a)^{\alpha}dx = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte.$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. pour $x > a$, on a :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a) + cte$$

   et pour $x < a$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln(-x+a) + cte$$

   d'où les deux cas, on a :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + cte$$

4. Pour tout nombre réel $m \neq 0$, on a sur $\mathbb{R}$:

$$\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m} + cte$$

5. Pour tout m, p, α et β ($\beta \neq 0$) de $\mathbb{R}$, on a :

$$\int \frac{mx+p}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{m}{2}\ln[x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{p+m\alpha}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + cte$$

Exercice

Soit $f(x) = c + \sum\limits_{k=1}^{k=n} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$, Établir que :

$c = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)dt, \quad a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\cos(k\omega t)dt, \;\; b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin(k\omega t)dt$

1.4 Intégration des fonctions continues par morceaux

Définition 1.4.1. *Une fonction f est dit continue par morceaux sur $[a,b]$ si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité ou elle admet des limites à droite et à gauche finies. Autrement dit, il existe n de N^*, $d_0, d_1, ..., d_n$ tels que $a = d_0 < d_1 < .. < d_n = b$ avec f prolongeable par continuité sur $[d_k, d_{k+1}]$ pout tout $k = 0, 1, ..., n-1$.*

Exemples

1. $x \longrightarrow E(x)$ (partie entière de x) est une fonction continue par morceaux.
2. La fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \;\text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 2 \;\text{ si }\; x = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{2x+1} \;\text{ si }\; \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Définition 1.4.2. *Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ et $n \in N$, $\{d_0, d_1, ..., d_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $a = d_0 < d_1 < .. < d_n = b$ avec f prolongeable par continuité su $[d_k, d_{k+1}]$ pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$. Alors on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :*

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{d_k}^{d_{k+1}} f(t)dt$$

Exemple Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \;\text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{2}{2x+1} \;\text{ si }\; \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 f(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} xdx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{2}{2x+1}dx \\ &= \frac{1}{18} + 2\ln 3 - \ln 5 \end{aligned}$$

1.5 Applications du calcul intégral

L'espace euclidien est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1.5.1 Longueur d'un arc de courbe

Si une courbe γ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x(t) = f(t) \\ y(t)) = g(t) \\ z(t) = h(t) \end{array}\right.$ f, g, h de classe C^1. On admet que la longueur de l'arc $\widehat{AM_0}$ (A correspondant à $t = a$ et M à la valeur $t = t_0$) est donnée par l'intégrale :

$$\int_a^{t_0} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

Exemple : Calcul du périmètre d'un cercle de rayon R. Considérons le cercle de centre O et de rayon R, il a comme représentation paramétrique le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{array}\right.$$

alors, le périmètre p est donné par :

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \\ &= 2\pi R \end{aligned}$$

1.5.2 Calcul d'aires

Calcul d'aire d'un disque de rayon R.

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx \\ &= 4R\int_0^R \sqrt{1 - (\frac{x}{R})^2}dx \\ &= 4R\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cot^2 t}(-R\sin t)dt \\ &= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t)dt \\ &= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)dt \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

1.5.3 Calcul de volumes

On considère un solide limité par les plans : $z = a$ et $z = b$ $(a < b)$. On note $s(z)$ l'aire de la section du solide par la plan de coté z, perpendiculaire à l'axe des z. Lorsque s est une fonction continue de z sur $[a, b]$, le volume du solide est : $V = \int_a^b s(z)dz$.

Exemple

Volume d'une boule de rayon R La section de la boule par le plan de côte z est un disque d'aire $s(z)$ tel que :

$$\begin{aligned} s(z) &= \pi r^2(z) \\ &= \pi(R^2 - z^2) \end{aligned}$$

d'où la volume V de la boule est :

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2)dz \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

●●●●●●●●●●●

Chapitre 2

Équations différentielles linéaires

1. Introduction
2. Équations différentielles linéaires du premier ordre
3. Équations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Introduction

Sous certaines conditions, la chute de température d'un objet est proportionnelle à la différence entre la température de la surface de l'objet et celle du milieu ambiant.

Si $T(t)$ est la température de l'objet à l'instant t, $S(t)$ la température du milieu qui entoure cet objet, alors cette loi s'exprime, mathématiquement, sous la forme suivante :

$$\frac{dT}{dt} = k(T - S) \quad \text{ou} \quad T' - kT = -kS$$

où k est la constante de proportionnalité définie par les caractéristiques physiques de l'objet et du milieu. $S(t)$ est supposée connue. La fonction $T(t)$ est inconnue.

En général, la solution d'un problème physique passe très souvent par les étapes suivantes :

1) Construction d'un modéle mathématique : A ce niveau on définit les variables et on choisit un système d'unité. Dans l'exemple, l'équation à une seule variable t : c'est une équation à une dimension.

2) Résolution de l'équation obtenu : En général, il est difficile de trouver la solution exacte d'une telle équation, cependant et dans plusieurs cas on cherche que des solutions approchées. Dans ces conditions une étude théorique qui assure l'existence et l'uncité de la solution est nécessaire.

3) Interprétation de la solution : A cet étape, il faut vérifier que les résultats mathématiques s'adaptent avec l'intuition physique et les expériences faites au laboratoire, sinon le modèle devrait être réexaminé.

Dans ce chapitre, on étudiera uniquement l'étape 2 et on s'intéressera aux équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.

Définition 2.1.1. *Une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une équation de la forme :*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

où $a_1, a_2, ..., a_n, f$ sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I . La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de y, on note aussi $y^{(k)}$ par $\frac{d^k y}{dx^k}$.

2.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 2.2.1. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme :*

$$(E) \qquad y' + a(x)y = f(x)$$

où a et f sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I.

Considérons l'équation sans second membre (l'équation homogène) associée à (E) :

$$(H) \quad y' + a(x)y = 0$$

Soit y_0 une solution particulière de (E), donc y est une solution de (E) si et seulement si $y' + a(x)y = f(x)$ et on a $y_0' + a(x)y_0 = f(x)$, donc $(y - y_0)' + a(x)(y - y) = 0$, c'est à dire $y - y_0$ est une solution de (H)

D'où :

$$y = y_0 + y_f \text{ avec } y_f \text{ la solution générale de } (H)$$

$$\boxed{\text{solution générale de } (E) = \text{solution particulière de } (E) + \text{ solution générale de } (H)}$$

2.2.1 Solution générale de $(H) : y' + a(x)y = 0$

Soit A une primitive de la fonction $-a$, on pose $y = ce^{A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$, alors :

$$y' = cA'(x)e^{A(x)} = -a(x)y$$

entraîne $y' + ay = 0$, donc $y = ce^{A(x)}$ est la solution générale de (H)

Remarque

On pose $S : \{f \in C^1(I)/f' + af = 0\}$, on montre que S est un sous-espace vectoriel de $C^1(I)$, de dimension 1, donc il suffit de déterminer un générateur de S qui sera la solution générale de l'équation (H).

Exemples

1. $y' + \frac{1}{x}y = 0$, $x > 0$

   la solution générale, définie sur $]0, +\infty[$, est $y = ce^{\int \frac{-1}{x}dx} = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$.
2. $xy' + (x + 2)y = 0$, $x > 0$

   la solution générale, définie sur $]0, +\infty[$, est $y = ce^{\int -\frac{x+2}{x}dx} = cx^2e^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Solution particulière de (E) $y' + a(x)y = f(x)$

La méthode de la variation de la constante la solution générale de (H) est $y = ce^{A(x)}$, on va supposer c comme une fonction de x et on cherche c de telle sorte que $y = c(x)e^{A(x)}$ soit une solution de (E).

$$\begin{aligned} y = c(x)e^{A(x)}\text{solution de}(E) &\Longleftrightarrow c'(x)e^{A(x)} + c(x)A'(x)e^{A(x)} + a(x)c(x)e^{A(x)} = f(x) \\ &\Longleftrightarrow c'(x)e^{A(x)} = f(x) \\ &\Longleftrightarrow c'(x) = e^{-A(x)}f(x) \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : c(x) = \int e^{-A(x)}f(x)dx + k \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) est :

$$y = \underbrace{e^{A(x)} \int e^{-A(x)}f(x)dx}_{\text{Solution particulière de } (E)} + \underbrace{ke^{A(x)}}_{\text{Solution générale de } (H)}$$

Exemples

1. $2y' + y = 3 <=> y' + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$
   $$\begin{aligned} y(x) &= e^{\frac{-1}{2}x} \int \tfrac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}dx + ce^{-\frac{1}{2}x} \\ &= 3 + ce^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$
2. $xy' - 3y = x^2 + 2x$, $x > 0$
   $$y(x) = -x^2 - x + kx^3, \ \ k \text{ constante.}$$
3. $\begin{cases} \cos x.y' - y\sin x = 1, \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   La solution générale est $y(x) = \sin x + \cos x$

Applications

1) Désintégratin des corps radioactifs L'étude expérimentale montre que les substances radioactives se désintègrent à un taux proportionnel à la quantité présente. C'est à dire, si $N(t)$ est le nombre d'atomes d'une substance radioactive présente à l'instant t, alors :

$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad (1)$$

où k est une constante positive, appelée constante de désintégration.

La solution de (1) est $N(t) = Ce^{-kt}$

Si $N(0) = N_0$ est le nombre initial des atomes à l'instant $t = 0$, alors $N(t) = N_0e^{-kt}$.

À partir de cette équation on peut déterminer le temps t que met la substance pour se désintégrer de la quantité N_0 à $N(t)$, en effet :

$$t = \frac{-1}{k} \ln(\frac{N(t)}{N_0}) \quad (2)$$

la formule (2) est utilisée en Archéologie, Paléontologie, Géologie et en Art pour trouver l'âge des vieux objets (pierres, fossiles, pièces d'art,etc...)

Pour trouver la constante k, on utilise la *demi-vie* de la substance radioactive, c'est à dire la durée T que met la moitié de la substance pour se désintégrer. On trouve

$$T = \frac{-1}{k}\ln(\frac{1}{2}) \text{ ou } k = \frac{\ln 2}{T}$$

2) Loi de refroidissement de Newton Au cours de l'enquête sur un meurtre ou une mort accidentelle, il est important de connaître l'heure où la mort a eu lieu. À partir d'observations expérimentales, on établit que la température de la surface du corps change proportionnellement à la différence entre la température du corps et celle du milieu environnant. Soit $\theta(t)$ la température de l'objet à l'instant t et T celle du milieu, alors θ doit satisfaire l'équation :

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T) \quad (*)$$

où k est une constante.

Supposons qu'un corps est découvert à l'instant $t = 0$, et que sa température est égale à θ_0. Si la mort a lieu à l'instant t_m, alors la température du corps est égale à $\theta_m = 37°C$. La résolution de l'équation $(*)$ donne :

$$\theta(t) = T - (\theta_0 - T)e^{kt}$$

Pour déterminer k, il suffit de mesurer la température θ_1 du corps à un moment ultérieur $t_1 > 0$. En effet :

$$\theta_1 - T = (\theta_0 - T)e^{-kt_1}$$

d'où

$$k = -\frac{1}{t_1}\ln(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T})$$

et par conséquent, le temps de la mort t_m est donné par :

$$t_m = -\frac{1}{k}\ln(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T})$$

2.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Rappelons qu'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants s'écrit :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = f(x)$$

où a et b sont des réels et f une fonction donnée.

L'équation homogène associe à (E) est :

$$(H) \quad y'' + ay' + by = 0$$

Soit y_0 une solution particulière de (E), donc y est solution de (E) si et seulement si $y' + a(x)y = f(x)$ et on a $y_0' + a(x)y_0 = f(x)$, donc $(y - y_0)' + a(x)(y - y) = 0$, c'est à dire $y - y_0$ est solution de (H)

D'où :

$\boxed{\text{solution générale de } (E) = \text{solution particulière de } (E) + \text{solution générale de } (H)}$

Remarque

On pose $S : \{f \in C^1(I)/f'' + af' + bf = 0\}$, on montre que S est un sous-espace vectoriel de $C^1(I)$, de dimension 2, donc il suffit de déterminer une famille génératrice et libre à deux éléments de S et la solution générale de l'équation (H) sera toute combinaison linéaire de ces deux éléments.

2.3.1 Solution générale de $(H) : y'' + ay' + by = 0$

La résolution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est basée sur l'idée qui consiste à chercher des solutions de la forme $y(x) = e^{rx}$. donc $(e^{rx})'' + a(e^{rx})' + b(e^{rx}) = (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$

Par conséquent $y(x) = e^{rx}$ est solution si, et seulement si, $r^2 + ar + b = 0$ (équation caractéristique de (H)).

Théorème 2.3.1. *Considérons l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, l'équation caractéristique associée est :*

$$r^2 + ar + b = 0$$

1) *Si on a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors la solution générale est donnée par :*

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$

2) *Si on a une racine double r alors :*

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{rx}$$

3) *Si on a deux racines complexes $r + is$ et $r - is$ alors la solution générale est donnée par :*

$$y(x) = e^{rx}(\alpha \cos sx + \beta \sin sx)$$

Exemples

1. $y'' - 2y' - 8y = 0,\ \ y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ \ y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$
3. $y'' + 2y' + 10y = 0,\ \ y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

2.3.2 Solution particulière de (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$

Théorème 2.3.2. *Les étapes qui permettent d'avoir une solution particulière de l'équation :*

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)$$

où a, b et c sont des constantes et les f sont des fonctions données, sont :

1. *On considère les équations :*

$$y'' + ay' + by = f_i(x)$$

pour chaque $i = 1, 2, ..., m$

2. *Chercher une solution particulière Y_i de $(*)$. On procède de la façon suivante :*
   - *Si*

$$f_i(x) = e^{\alpha x} p_n(x),$$

où p_n est une fonction polynômial de degré n, alors on a :

$$Y_i(x) = e^{\alpha x} x^s (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n)$$

où les constantes $a_0, a_1, ..., a_n$ sont à déterminer et $s = 0, 1, 2$. La puissance s est égale à 0 si α n'est pas racine de l'équation caractéristique. Si α est une racine simple alors $s = 1$ et si α est une racine double alors $s = 2$.

   - *Si*

$$f_i(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \cos(\beta x)$$

ou

$$f_i(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \sin(\beta x)$$

où p_n est une fonction polynômial de degré n, alors on a :

$$Y_i(x) = e^{\alpha x} x^s [(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) \cos(\beta x) + (b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n) \sin(\beta x)]$$

où les constantes a_i, b_i sont à déterminer et $s = 0, 1$. La puissance s est égale à 0 si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. Si $\alpha + i\beta$ est une racine alors $s = 1$.

3. *La fonction $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ est une solution particulière de l'équation initiale.*

Exemple Considérons l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x} \sin(x) - x \sin(2x) \qquad (*)$$

La résolution de l'équation homogène $y" + 4y = 0$ donne

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

Une solution particulière de

$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x} \sin(x)$$

s'écrit de la forme

$$Y_1(x) = e^{-3x}((Ax^2 + Bx + C)\cos(x) + (Dx^2 + Ex + F)\sin(x))$$

De même une solution particulière de

$$y'' + 4y = -x \sin(2x)$$

est de la forme

$$Y_2(x) = x((Gx + H)\cos(2x) + (Ix + J)\sin(2x))$$

Par conséquent, la solution particulière de l'équation $(*)$ est de la forme $Y = Y_1 + Y_2$ c'est à dire

$Y(x) = e^{-3x}((Ax^2 + Bx + C)\cos(x) + (Dx^2 + Ex + F)\sin(x)) + x((Gx + H)\cos(2x) + (Ix + J)\sin(2x))$

Remarquons qu'il y a dix constantes à déterminer.

Applications

1) Circuits électriques simples La somme des chutes de tension à travers les différents éléments d'un circuit électrique est égale à la force électromtrice totale mise en jeu dans ce circuit. La chute de tension à travers une résistance de $R\ Ohms$, est Ri, à travers une bobine d'inductance $L\ Henrys$ de $L\frac{di}{dt}$, et à travers un condensateur de capacité $C\ Farads$, de $\frac{q}{C}$. Ici, i et q sont liées par $i = \frac{dq}{dt}$.

L'équation différentielle d'un circuit électrique contenant une inductance L, une résistance R, une capacité C et un générateur de force électromotrice $E(t)$ est

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t)$$

où

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{qt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

Une fois $q(t)$ trouvée, on en déduit $i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$

2) Mouvement d'un pendule Un pendule, de longueur l et de masse m, suspendu en un point P se déplace dans un plan vertical passant par P. On néglige toutes les forces autres que la gravité.

Soit $\theta(t)$ l'angle que fait le fil avec la verticale à l'instant t. L'équation différentielle du pendule est de la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

où g est la pesanteur

Dans le cas où le mouvement est initialisé par une petite perturbation autour de la position d'équilibre, l'angle θ reste petit et $\sin(\theta) \simeq \theta$. Donc l'équation $(*)$ s'écrit $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$, dont la résolution donne :

$$\theta(t) = A\cos(\sqrt{\frac{l}{g}}t) + B\sin(\sqrt{\frac{l}{g}}t)$$

On obtient un mouvement sinusoïdale.

●●●●●●●●●●

Chapitre 3

Fonctions réelles de plusieurs variables

1. Introduction
2. Définitions et propriétés
3. Dérivées partielles
4. Différentielles, formes différentielles
5. Application : Calcul des erreurs

3.1 Introduction

Dans le cours de mécanique, on démontre que la période T d'un pendule dépend de deux grandeurs indépendantes, la longueur l et la pesanteur g tels que :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

à chaque valeur du couple (l, g) correspond une seule valeur numérique du période T.

De même, la propagation de la chaleur par conduction le long d'une tige homogène dépend de la température θ, du temps t, de la longueur l et de l'aire A de la section de cette tige ; la qauntité de la chaleur qui s'est propagée est de la forme :

$$\triangle Q = k\frac{A.\triangle\theta}{l}\triangle t$$

D'une manière générale, à tout point $M(x, y, ...)$ on peut associer un nombre $f(x, y, ...)$. En particulier, l'état physique ou chimique d'un système dépend de deux, de trois ou plusieurs variables indépendantes.

Dans ce chapitre, on se limitera au fonctions de n $(n = 2, 3)$ variables indépendantes.

3.2 Définitions et propriétés

3.2.1 Fonction réelle de n (n=2,3) variables

Définition 3.2.1. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$, une fonction de D dans $\mathbf{R}$ est dite fonction numérique ou fonction réelle de n variables réelles $x, y, ...$*

On écrit :

$$f: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x, y, ...) & \longmapsto & f(x, y, ...) \end{array}$$

Exemples

1. Soit la fonction $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^3$
   - f est définie sur $\mathbb{R}^2$,
   - $f(2, 1) = 5,\ f(0, -1) = -3$
2. La fonction $(x, y) \to \ln(1 - x^2 - y^2)$ est définie sur le disque $D(O, 1)$ privé du cercle $C(O, 1)$.
3. La fonction $(x, y, z) \to \sqrt{x(y^2 + z^2 + 1)}$ est définie sur la partie $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0\}$

3.2.2 Limite et continuité

Définition 3.2.2. *On dit que la fonction $(x, y) \to f(x, y)$ admet la limite l lorsque le point $M(x, y)$ tend vers $A(a, b)$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad tel\ que \quad : \left. \begin{array}{l} |x - a| < \alpha \\ |y - b| < \alpha \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

et on écrit :

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = l$$

De même on définit la limite en un point d'une fonction à trois variables.

Exemples

1. $f(x, y) = x + y,\ l = 2,\ A(1, 1)$

   Soit $\varepsilon > 0$

   Si $\quad |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ et \ \ |y - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$

   alors
   $$\begin{aligned} |f(x, y) - 2| &= |x + y - 2| \\ &\leq |x - 1| + |y - 1| < \varepsilon \end{aligned}$$
   donc : $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (1,1)} f(x, y) = 2$
2. $f(x, y, z) = x^2 + 2y + z,\ l = -1,\ A(1, -1, 0)$
   $$\begin{aligned} \left|x^2 + 2y + z + 1\right| &= \left|x^2 - 1 + 2(y + 1) + z\right| \\ &\leq |(x - 1)(x + 1)| + 2\,|y + 1| + |z| \end{aligned}$$
   donc si $x \in]\frac{-\varepsilon}{3} + 1, 1 + \frac{\varepsilon}{3}[\cap]0, 2[,\ |y + 1| < \frac{\varepsilon}{6},\ |z| < \frac{\varepsilon}{3}$, alors $\left|x^2 + 2y + z + 1\right| < \varepsilon$

c'est à dire $|f(x,y,z)-1|<\varepsilon$
d'où :

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,0)} f(x,y,z) = -1$$

Définition 3.2.3. *On dit que la fonction $(x,y)\to f(x,y)$ est continue au point $A(a,b)$ si et seulement si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

De même on définit la continuité d'une fonction à trois variables.

Remarque Les fonctions considérés dans l'exemple précédent sont continues respectivement en $(1,1)$ et $(1,-1,0)$.

Définition 3.2.4. *On dit qu'une fonction à n variables est continue sur une partie D de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle est continue en tout point de D.*

3.3 Dérivées partielles

3.3.1 Dérivées partielles du premier ordre

Définition 3.3.1. *Si la fonction $x\longrightarrow f(x,b)$ (resp. $y\longrightarrow f(a,y)$) de la variable réelle x (resp.y) admet une dérivée en a (resp. b), on représente cette dérivée par $f'_x(a,b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ (resp. $f'_y(a,b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$) et on dit que c'est la dérivée partielle de la fonction f par rapport à x(resp. y).*
De même, on définit les dérivées partielles pour une fonction à trois variables.

Exemples

1. $f(x,y)=y\sqrt{x}-3y^2$
   Montrer que $\forall a>0, \forall b\in\mathbb{R}, \quad f'_x(a,b)=\frac{b}{2\sqrt{a}}, \;\; f'_y(a,b)=\sqrt{a}-6b$
2. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$
   $$f'_x(0,0)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{0}{x}=0$$
   $$f'_y(0,0)=\lim_{y\longrightarrow 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\longrightarrow 0}\frac{0}{y}=0$$
3. $f(x,y,z)=x-y^2+z^3$
   $$f'_x(a,b,c)=\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x}=1$$
   $$f'_y(a,b,c)=\lim_{y\longrightarrow b}\frac{f(a,y,b)-f(a,b,c)}{y}=-2b$$
   $$f'_z(a,b,c)=\lim_{z\longrightarrow c}\frac{f(a,b,z)-f(a,b,c)}{z-c}=3c^2$$

Remarque

En pratique, la dérivée partielle par rapport à x s'obtient en dérivant par rapport à x en supposant y constant ; pour la dérivée partielle par rapport à y, on dérive par rapport à y en supposant x constant. De même pour les fonctions à trois variables. Par exemple, pour $f(x,y,z)=(1+xz+y)e^{xz}$, on a :

$$f'_x(x,y,z)=z[1+(1+xz+y)]e^{xz}$$
$$f'_y(x,y,z)=e^{xz}$$
$$f'_z(x,y,z)=[x+(1+xz+y)]e^{xz}$$

3.3.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 3.3.2. *Soit* $(x,y) \longrightarrow f(x,y)$ *une fonction définie et admet des dérivées partielles* f'_x *et* f'_y. *Si* f'_x *et* f'_y *admettent des dérivées partielles, ce sont les dérivées partielles du deuxième ordre.*

Notations : $f''_{x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \;\; f''_{xy} = \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$f''_{yx} = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \;\; f''_{y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Si ces dérivées partielles secondes admettent à leur tour des dérivées, on définit ainsi les dérivées partielles d'ordre $3, 4, ..., n$. De meme on définit les dérivées partielles d'ordre supérieur pour les fonctions à 3 variables.

Exemples

1. $f(x,y) = x^m y^n \quad (m, n \in N)$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = m(m-1)x^{m-2}y^n, \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = mnx^{m-1}y^{n-1}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = mnx^{m-1}y^{n-1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = n(n-1)x^m y^{n-2}$

2. $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+2y^2}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-x^2+2y^2}{(x^2+2y^2)^2}, \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+2y^2)^2}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+2y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x^2-2y^2)}{(x^2+2y^2)^2}$

On remarque que, dans les deux exemples, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, ce résultat peut se généraliser : c'est le théorème de **Schwarz**

Théorème 3.3.1. *(de **Schwarz**) Si les dérivées partielles sont continues dans un domaine* D *de* $\mathbb{R}^2$*, alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \;\; \forall (x,y) \in D$.

Exemple d'application : *L'équation d'onde* La fonction d'onde d'une vibration harmonique se déplaçant dans la direction des x en fonction du temps est de la forme :

$\Psi(x,t) = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ où A, T et λ sont des constantes. ($\lambda = vT$, v la vitesse de la propagation de l'onde, T la période et λ la longeur d'onde).

Montrons que $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$, en effet :

$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda} A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ et $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -(\frac{2\pi}{\lambda})^2 A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ et $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -(\frac{2\pi}{vT})^2 A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = -(\frac{2\pi}{\lambda})^2 A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

donc

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \;\; (L'\acute{e}quation\ d'onde\ )$$

Exercice

Soit $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \;\; (x,y,z) \neq (0,0,0)$

Montrer que $\triangle f = 0$ ($\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, s'appelle le *laplacien* de f)

3.4 Différentielles, formes différentielles.

3.4.1 Différentielles

`Cas de deux variables`

Défintion

Définition 3.4.1. *Soit* $(x,y) \longrightarrow f(x,y)$ *une fonction à deux variables, définie sur une partie* D *de* $\mathbb{R}^2$.

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

est la $différentielle$ *totale de* f *en* $(x,y) \in D$.
Si $df(x,y)$ *existe* $\forall (x,y) \in D$, *on dit que* f *est différentiable sur* D.

Exemple $f(x,y) = x^2 - 3xy^2$
$df(x,y) = (2x - 3y^2)dx - 6xydy$

`Cas de trois variables`

Définition 3.4.2. *Soit* $(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ *une fonction à trois variables, définie sur une partie* D *de* $\mathbb{R}^3$.

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz$$

est la $différentielle$ *totale de* f *en* $(x,y,z) \in D$.
Si $df(x,y,z)$ *existe* $\forall (x,y,z) \in D$, *on dit que* f *est différentiable sur* D.

3.4.2 Formes différentielles dans $\mathbb{R}^2$

Définition 3.4.3. *Soit* $(x,y) \longrightarrow P(x,y)$ *et* $(x,y) \longrightarrow Q(x,y)$ *deux fonction de deux variables définies sur une partie* D *de* R^2.
On pose $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
ω *est appelé* $forme\ différentielle$ *à deux variables.*

Définition 3.4.4. *On dit qu'une forme différentielle à deux variables* $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *est* $différentielle$ *totale exacte (F.T.E) s'il existe une fonction* $F(x,y)$ *telle que* $dF = \omega$

Exemples

1. $\omega = e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$ est une différentielle totale exacte car ω est la différentielle de $F(x,y) = e^x \sin y$.
2. L'expression $(x+y)dx + (x-y)dy$ peut s'écrire
   $$xdx - ydy + ydx + xdy$$
   ou
   $$d(\tfrac{x^2}{2}) - d(\tfrac{y^2}{2}) + d(xy)$$
   c'est la différentielle de $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy + C$, C étant une constante quelconque.

Théorème 3.4.1. *Soient* $P(x,y), Q(x,y)$ *deux fonctions continues sur* $D = \{(x,y)/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ *ainsi que leurs dérivées partielles. Alors il existe une fonction* $F(x,y)$ *définie sur* D *telle que* $dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *si, et seulement si,* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Exemples

1. $P(x,y) = y^3 + \cos(x+y)$ et $Q(x,y) = 3xy^2 + \cos(x+y)$
   On a :
   $$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - \sin(x+y)$$
   $$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - \sin(x+y)$$
   alors il existe une fonction F telle que : $DF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

2. $P(x,y) = 3x^2 + 2xy$ et $Q(x,y) = x^2$

On a :

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

alors il existe une fonction F telle que :

$DF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = [3x^2 + 2xy]dx + x^2dy$

d'où

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2$

donc $F(x,y) = x^2y + g(x)$ où g est une fonction de la variable x

alors $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + g'(x) \end{cases}$

$g'(x) = 3x^2$ entraîne $g(x) = x^3 + C$ où C est une constante

et par suite

$$F(x,y) = x^2y + x^3 + C.$$

`Application en Thermodynamique`

Dans le cours de Thermodynamique, on montre qu'un système en équilibre est carctérisé par un certain nombre de variables, dites variables d'état, ces variables sont liées par des relations : équations d'état ; ces équations caractérisent les propriétés du système dans son état d'équilibre.

Par exemple, une masse d'un gaz est carctérisée par sa température T, sa pression P, son volume V, son énergie U, son entropie S,... ; si on choisit la temperature et le volume de cette masse, alors les autres variables sont liées par des relations :

$$P = f(T,V),\ U = g(T,V),\ S = h(T,V)$$

Dans le cas d'une *transformation révirsible*(c-à-d par une suite d'étas d'équilibre), le 1^{er}**principe de le Thermodynamique** définit une fonction d'état, l'énergie libre U, telle que :

$$dU = \triangle Q_{rév} + \triangle W$$

· Montrons que $\triangle Q_{rév}$ n'est pas une forme $D.T.E.$

$$\triangle Q_{rév} = dU - \triangle W$$

$$= dU + PdV \qquad (\triangle W = -PdV)$$

$U = g(T,V) \quad => \quad dU = \frac{\partial g}{\partial T}dT + \frac{\partial g}{\partial V}dV$

$$\triangle Q_{rév} = \frac{\partial g}{\partial T}dT + \frac{\partial g}{\partial V}dV + PdV$$

$$= (\frac{\partial g}{\partial V} + P)dV + \frac{\partial g}{\partial T}dT$$

$$= M(T,V)dV + N(T,V)dT$$

Pour que $\triangle Q_{rév}$ soit une forme $D.T.E$ il faut que

$$\frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial N}{\partial V}$$

c-à-d

$$\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial V} + \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial^2 g}{\partial V \partial T}$$

comme $\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 g}{\partial V \partial T}$ (Théorème de **Cauchy**), alors pour que $\triangle Q_{rév}$ soit une forme $D.T.E$ il faut que $\frac{\partial P}{\partial T} = 0$, ce qui n'est pas vrai en général.

Dans ce cas on dit que $Q_{rév}$ n'est une fonction d'état : les quantités de chaleur $Q_{rév}$ échangées entre un système et son milieu extérieur dépendent du type de transformation ; en d'autre terme, $Q_{rév}$ n'est pas une propriété du système d'équilibre.

· Considérons un mole de gaz parfait ; montrons que$\frac{\triangle Q_{rév}}{T}$ est unefonction d'état c-à-d une forme différentielle totale exacte. En effet :

$$\frac{\triangle Q_{rév}}{T} = dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{1}{T}(\frac{\partial g}{\partial V} + P)dV + \frac{1}{T}\frac{\partial g}{\partial T}dT$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial T}[\frac{1}{T}(\frac{\partial g}{\partial V} + P)] = -\frac{1}{T^2}(\frac{\partial g}{\partial V} + P) + \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial T}(\frac{\partial g}{\partial V} + P)$$

$$= -\frac{1}{T^2}\frac{\partial g}{\partial V} - \frac{P}{T^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial V} + \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial T}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial g}{\partial T}\right) = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 g}{\partial V \partial T}$$

pour que $\frac{\partial}{\partial T}[\frac{1}{T}(\frac{\partial g}{\partial V} + P)] = \frac{\partial}{\partial V}(\frac{1}{T}\frac{\partial g}{\partial T})$, il faut que $-\frac{1}{T^2}\frac{\partial g}{\partial V} + \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial T} - \frac{P}{T^2} = 0$ $(*)$
Comme il s'agit d'un gaz parfait :
∘ d'une part, pour un mole : $P = \frac{RT}{V} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V}$
∘ d'autre part, son énergie interne ne dépend que de la température T, donc $\frac{\partial g}{\partial V} = 0$
L'expression $(*)$ est bien nulle, dS est une $D.T.E$ et S est une fonction d'état ; en effet, le $2^{ème}$ **principe de la thermodynamique** introduit cette fonction d'état S appelée `entropie`.

3.5 Application : Calcul des erreurs

3.5.1 Erreur absolue et erreur relative

Définition 3.5.1. *L'erreur absolue commise sur le nombre x quand on lui substitue une valeur approchée $\bar{x}$ est la différence $\triangle x = x - \bar{x}$*

En pratique on connaît $\bar{x}$ et, non pas l'erreur, mais seulement un majoration ε de cette erreur, autrement dit on est en mesure d'affirmer que x satisfait à l'inégalité

$$\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x} + \varepsilon$$

On exprime cette encadrement en disant que $\bar{x}$ est une valeur approchée de x avec une erreur inférieure à ε, ou avec une incertitude égale à ε.

Dire que $\bar{x}$ est une valeur approchée par $défaut$ de x, l'erreur étant inférieure à ε, c'est à dire x satisfait à l'inégalité

$$\bar{x} < x < \bar{x} + \varepsilon.$$

Dire que $\bar{x}$ est une valeur approchée par *excès* de x, l'erreur étant inférieure à ε,c'est à dire x satisfait à l'inégalité

$$\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}.$$

Définition 3.5.2. *L'erreur relative commise sur le nombre x quand on lui substitue une valeur approchée $\bar{x}$ est le quotient $\frac{\triangle x}{x} = \frac{x - \bar{x}}{x}$ de l'erreur absolue $\triangle x$ par la valeur exacte x.*

De l'encadrement

$$0 < |\bar{x}| - \varepsilon < |x| < |\bar{x}| + \varepsilon$$

on déduit $\left|\frac{\triangle x}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{|\bar{x}| - \varepsilon}$; il en résulte que $\frac{\varepsilon}{|\bar{x}| - \varepsilon}$ est un majorant de l'erreur relative.

3.5.2 Problème de la théorie des erreurs

Les données d'un calcul étant entachées d'erreurs dont on connait des majorants, trouver un majorant de l'erreur que l'on commet sur le résultat en remplaçant les données par les valeurs approchées.

Par exemple, soit f une fonction donnée (de trois variables pour fixer les idées), et $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ des valeurs approchées des nombres x, y, z, quand nous prenons $\bar{\omega} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pour valeur approchée du nombre $\omega = f(x, y, z)$ nous commettons une erreur $\triangle\omega = \omega - \bar{\omega}$

L'objectif de cette partie c'est de trouver un majorant de $\triangle\omega = \omega - \bar{\omega}$. Nous allons montrer que la formule des accroissements finis permet de majorer cet erreur.

Exemples

1. `Erreur sur le calcul de` $\omega = f(x)$.
   On suppose que f est de classe C^1 sur $[x, \bar{x}]$, la formule des accroissements finis appliquée sur $[x, \bar{x}]$, donne

$$f(x) - f(x) = x - x)f'(\xi), \;\; \xi \in]x, x[$$

et

$$|\omega - \bar{\omega}| = |x - \bar{x}| \, |f'(\xi)|$$

On en déduit que l'on obtient un majorant ε_ω de $|\omega - \bar{\omega}|$ en multipliant un majorant de ω_x de $|x - \bar{x}|$ par un majorant de $|f'(\xi)|$.

d'où la formule :

$$\boxed{\varepsilon_\omega = A\omega_x}$$

où

$$A = \sup_{x \in]x, \bar{x}[} |f'(x)|$$

· Soit à calculer une valeur approchée de $\sin 31°$.

Nous avons :

$$\sin 31° - \sin 30° = \tfrac{\pi}{180} \cos\xi; \;\; \bar{x} = 30° < \xi < 31° = x$$

On a :

$$0 < \cos\xi < \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Il en résulte de là que si l'on prend $0,5$ comme valeur approchée de $\sin 31°$ on commet une erreur inférieure à $\frac{\pi}{180} \frac{\sqrt{3}}{2} < 0.016$.

2. `Erreur sur le calcul de` $\omega = f(x, y, z)$.

La formule des accroissements finis s'écrit, en désignant par M et $\bar{M}$ les points (x, y, z) et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,

$$f(M) - f(\bar{M}) = (x - \bar{x}) \tfrac{\partial f}{\partial x}(P) + (y - \bar{y}) \tfrac{\partial f}{\partial y}(P) + (z - \bar{z}) \tfrac{\partial f}{\partial z}(P)$$

P désignant un point du segment de doite $(M\bar{M})$.

On en déduit

$$\begin{aligned} \triangle\omega = & \; |\omega - \bar{\omega}| \\ = & \; |x - \bar{x}| \left| \tfrac{\partial f}{\partial x}(P) \right| + |y - \bar{y}| \left| \tfrac{\partial f}{\partial y}(P) \right| + |z - \bar{z}| \left| \tfrac{\partial f}{\partial z}(P) \right| \end{aligned}$$

ce qui montre que si $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ désignent respectivement des majorants de $|x - \bar{x}|, |y - \bar{y}|, |z - \bar{z}|$ un majorant de $|\omega - \bar{\omega}|$ est fourni par la formule :

$$\boxed{\varepsilon_\omega = A\varepsilon_x + B\varepsilon_y + C\varepsilon_z}$$

A, B, C désignent respectivement des majorants de $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right|$ sur un domaine qui contient le segment de droite $(M\bar{M})$

Exercices

1. $\omega = f(x, y, z)$, avec $f(x, y, z) = (1 + 2x) \frac{y}{z}$

a) Exprimer l'incertitude absolue sur f à partir des incertitudes absolue sur x, y et z.

b) Sachant que $x = 4, y = 6$ et $z = 3$, et que ces valeurs sont connues à 1% près, en déduire l'incertitude maximum sur f.

a) On a :

$$\begin{aligned} & \tfrac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{2y}{z}, \tfrac{\partial f}{\partial y} = (1 + 2x) \tfrac{1}{z}, \tfrac{\partial f}{\partial z} = -(1 + 2x) \tfrac{y}{z^2} \\ & \triangle\omega = 2 \left| \tfrac{y}{z} \right| \triangle x + \left| (1 + 2x) \tfrac{1}{z} \right| \triangle y + \left| (1 + 2x) \tfrac{y}{z^2} \right| \triangle z \end{aligned}$$

b) Nous avons :

$$\tfrac{\triangle x}{x} = \tfrac{\triangle y}{y} = \tfrac{\triangle z}{z} = 0.01$$

d'où :

$$\triangle\omega = 2(\tfrac{6}{3}) \times 0.01 \times 4 + \tfrac{1+2\times4}{3} \times 0.01 \times 6 + (1 + 2 \times 4) \tfrac{6}{9} \times 0.01 \times 3 = 0.52$$

$\omega = f(4, 6, 3) = 18$

donc :

$$\tfrac{\triangle\omega}{\omega} = \tfrac{0.52}{18} = 2.888\,9 \times 10^{-2} \;\; \text{soit } 3\% \text{ environ.}$$

2. Les dimensions d'un parallélépipède rectangle sont $a = 50 \pm 0.005\ cm$, $b = 100 \pm 0.005\ cm$ et $c = 20 \pm 0.005\ cm$; quelle est l'erreur absolue sur son volume V.

   Nous avons $V = abc \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}$

   $$\frac{\triangle V}{V} = \frac{\triangle a}{a} + \frac{\triangle b}{b} + \frac{\triangle c}{c}$$
   $$= 0.005\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{20}\right) = 4.10^{-4}$$

   $\triangle V = V.4.10^{-4} = 100 \times 50 \times 20 \times 4.10^{-4} = 40cm^3$

●●●●●●●●●●●